Wladimir von Ignatowsky

RENASCENCE SAMMLUNG

RELATIVITY WITHOUT ANSÄTZE ?

AND SOME OTHER PAPERS RELATIVE

TO THE SUBJECT

Ignatowsky tried to define relativity without some Ansätze which can seem arbitrary, and founded the transformation group approach .

He was murdered by communists in 1942

Das Relativitätsprinzip

Wladimir Sergejewitsch Ignatowski

Leipzig, 1911

Exportiert aus Wikisource am 5. April 2021

Das Relativitätsprinzip

Von W. v. Ignatowsky in Berlin.[1]

Das Relativitätsprinzip, welches von *A. Einstein*[2] aufgestellt wurde, hat eine solche eingreifende Bedeutung erhalten, wie vom physikalischen, so auch vom erkenntnistheoretischen Standpunkt aus, daß es nicht unnütz erscheint, die Grundlagen desselben noch einmal zu revidieren und möglichst streng diejenigen Konsequenzen zu verfolgen, welche dieses Prinzip ergibt: erstens um sich eine klare Vorstellung von diesem Prinzip zu verschaffen, denn diesbezüglich herrscht noch viel Willkür, und zweitens, um eine Richtschnur zu haben, auf Grund deren man Gewißheit erlangen kann, das Prinzip nicht unterschätzt, aber auch nicht überschätzt zu haben.

Allein auf Grund des Relativitätsprinzips kann man beweisen, daß es eine universelle Raumkonstante geben muß, im Gegensatz zu *A. Einstein*, welcher von vornherein, parallel mit dem Relativitätsprinzip, die Lichtgeschwindigkeit als universelle Konstante annimmt. Wir werden bei dem Existenzbeweis obiger Konstante überhaupt nicht von der Lichtgeschwindigkeit sprechen und die Existenz dieser Konstante ganz allgemein und nicht auf Grund irgend einer speziellen physikalischen Erscheinung ableiten. Nachträglich werden einige allgemeine Folgerungen gezogen und an Beispielen erläutert und die Anwendung des Relativitätsprinzips auf einige Gebiete der theoretischen Physik gezeigt.

1. Einleitende Bemerkungen. Um über ein physikalisches Ereignis urteilen oder darüber eine Theorie bilden zu können, müssen wir uns ihm objektiv gegenüber stellen, sozusagen, es von

der Vogelperspektive aus betrachten. Was tun wir aber gewöhnlich dabei? Wir betrachten nur den Raum, in welchem sich das betreffende physikalische Ereignis abspielt, objektiv und nehmen die Zeit mit uns, indem wir diese als zu uns gehörig betrachten. Haben wir ein Recht dazu? Müssen wir nicht die Zeit als zu demjenigen Raum gehörig annehmen, wo das Ereignis stattfindet, d. h. müssen wir uns bei einer objektiven Betrachtung nicht nur außerhalb des betreffenden Raumes, sondern auch der Zeit stellen? Denn die Zeit ist mit jeder physikalischen Erscheinung untrennbar verknüpft[3], und wenn wir diese objektiv betrachten wollen, so dürfen wir die Zeit nicht isoliert behandeln, sondern sie als zu der Erscheinung gehörig rechnen und müssen deshalb, bei objektiver Betrachtung der letzteren, uns auch außerhalb der betreffenden Zeit stellen.

Dieses angenommen, wollen wir uns folgendes Bild machen. Wir stellen uns vor, daß es außer unserer Welt noch andere gibt, die sich, von uns aus beurteilt, mit konstanter translatorischer Geschwindigkeit im Raume bewegen. Wir selbst nehmen zu einer jeden dieser Welten einen objektiven Standpunkt ein und müssen deshalb, infolge obiger Erörterungen, annehmen, daß jede dieser Welten nicht nur ihren besonderen Raum beansprucht, sondern auch ihre eigene Zeit besitzt. Dasselbe muß sich auch ein Beobachter auf irgend einer der Welten in bezug auf die übrigen sagen.

Um uns über den Gang der physikalischen Erscheinungen in den verschiedenen Welten eine Vorstellung zu machen, befragen wir alle entsprechenden Beobachter, z. B. nach welchem mathematischen Gesetz bei ihnen die elektromagnetischen Erscheinungen im sogenannten Vakuum verlaufen. Und siehe da, als Antwort erhalten wir von allen Beobachtern eine

gleichlautende Formel und zwar die *Maxwell*schen Gleichungen d. h. dieselben, nach denen wir selbst diese Erscheinungen beobachten. Was schließen wir daraus? Wir schließen, daß in bezug auf diese Erscheinung alle unsere Welten gleichberechtigt sind und keine vor der anderen einen Vorzug hat. Verallgemeinern wir diese Betrachtungen auf alle Erscheinungen, so kommen wir zu dem Schluß, daß alle obigen Welten in allen Beziehungen einander gleichwertig sind. Insbesondere kann jede von ihnen sich als ruhend betrachten und die anderen als beweglich, relativ zu ihr. Wir kommen also zu dem Ergebnis, daß es uns unmöglich ist, eine absolute Bewegung nachzuweisen[4], und daß wir nur relative Bewegungen beobachten können, und gelangen so zu der allgemeinen Fassung des Relativitätsprinzips: „Durch kein Experiment, welches wir auf einer der Welten ausführen, können wir die absolute Bewegung derselben feststellen, sondern nur die relative in bezug auf die anderen Welten. Wir müssen also die betreffende Welt als ruhend betrachten. Alle Welten sind untereinander gleichwertig“. Daraus folgt umgekehrt, daß auf allen obigen Welten alle physikalischen Erscheinungen nach denselben Gesetzen verlaufen müssen. Denn wäre dies nicht der Fall, würde z. B. irgend eine physikalische Erscheinung auf einer der Welten nach einem besonderen Gesetz verlaufen, so würde diese Welt eine Sonderstellung einnehmen, was dem Relativitätsprinzip widerspricht.

Worin liegt aber denn eigentlich die Bedeutung dieses Prinzipes? Diese tritt aus folgender Überlegung hervor. Die obigen Welten, die wir nur zur klareren Darstellung herangezogen haben, brauchen tatsächlich garnicht zu existieren. Es genügt schon vollkommen, daß wir selbst durch kein Experiment unsere Translationsbewegung feststellen können. Und dies ist wirklich der Fall. Nun lassen sich, wie wir weiter sehen werden, auf Grund

des Relativitätsprinzips die Beziehungen ableiten, die zwischen den Koordinaten und der Zeit unserer Welt und den Koordinaten und der Zeit einer anderen (ob gedachten oder wirklichen, ist einerlei) Welt oder Bezugssystems, das sich uns gegenüber in einer konstanten translatorischen Bewegumg befindet, bestehen. Sind diese Beziehungen einmal festgelegt, so können wir ein beliebiges physikalisches Gesetz in ein solches, Welches jenem anderen Bezugssystem entspricht, transformieren. Bei dieser Tranformation erhalten wir einen neuen mathematischen Ausdruck für das Gesetz, aber wegen des Relativitätsprinzips muß seine Form erhalten bleiben. Wird dies nicht der Fall sein, so müssen wir hieraus schließen, daß das Gesetz selbst falsch ist. Das Gesetz muß eben eine solche Form haben, daß es diese bei der obigen Transformation nicht ändert. Das Relativitätsprnzip, solange wir seine Gültigkeit anerkennen, dient für uns, so zu sagen, als Kontrollinstanz bei der Aufstellung der mathematischen Form eines physikalischen Gesetzes. Zugleich muß aber hinzugefügt werden, was eigentlich infolge der obigen Erörterungen als selbstverständlich erscheint, daß das Relativitätsprinzip nicht im stande ist, uns irgend ein neues Gesetz aufzudecken. Dies kann einzig und allein das Experiment leisten. Denn angenommen, eine und dieselbe physikalische Erscheinung würde genügend genau durch zwei verschiedene mathematische Ausdrücke, die beide dem Relativitätsprinzip genügen, d. h. bei der Transformation von der einen Welt auf die andere ihre Form beibehalten, dargestellt werden können, dann kann das Relativitätsprinzip nicht entscheiden, welches Gesetz das richtige ist. Nur durch das Experiment, nur durch verfeinerte Meßmethoden können wir zum richtigen Gesetz gelangen. Das Relativitätsprinzip nimmt in der Physik genau dieselbe Stellung ein wie eine Lehre in der Maschinenfabrik, denn diese kann nur

anzeigen, ob der betreffende Maschinenteil richtig ausgeführt worden ist, sagt aber nichts über seine Herstellung aus. Alle Maschinenteile müssen in die Lehre passen und alle physikalischen Gesetze dem Relativitätsprinzip genügen.

2. Uhren. Maßstäbe. Beziehung zwischen Zeit und Länge. Wir wollen jetzt auf die Zeitmessung näher eingehen. Die Zeit bestimmen wir mit Hilfe von Uhren, von denen wir verschiedene haben müssen, die alle synchron laufen, an verschiedenen Stellen unseres Bezugssystems aufgestellt sind und in bezug auf uns alle ruhen. Denn hätten wir keine solche synchron laufenden und ruhenden Uhren, so wäre eine Zeitmessung überhaupt illusorisch. Durch was stellen wir den Synchronismus fest? Ganz einfach, durch ein beliebiges physikalisches Verfahren, sei es ein mechanisches oder optisches. Denn ergibt uns eine physikalische Messung, daß zwei in bezug auf uns ruhende Uhren synchron laufen, so laufen sie auch tatsächlich synchron. Hierdurch ist der Synchronismus eindeutig bestimmt, denn er läßt sich ständig durch das Experiment kontrollieren.

Wir gehen jetzt zu einer Längenmessung über. Zu dem Zweck bedienen wir uns eines Maßstabes, z. B. eines Meterstabes, und wollen jetzt einen gegebenen Stab damit vergleichen. Wir setzen voraus, daß der Meterstab in bezug auf uns ruht und bringen den zu messenden Stab an das Meter. Dann wird der Anfang und das Ende des Meters mit zwei Stellen des zu messenden Stabes zusammenfallen. Wir schneiden an diesen Stellen den Stab ab und haben dadurch eine Kopie unseres Meters erhalten, die sich der Länge nach von dem primären Meter nicht unterscheidet. Dabei haben wir aber folgendes beobachtet. Alle vier Punkte, d. h. der Anfang und das Ende des Meters und desgleichen des Stabes, ruhten während der Messung in bezug auf uns. Hätten wir folglich

in diese vier Punkte vier synchron laufende Uhren gebracht, so würden sie fortfahren, synchron zu laufen. Mit anderen Worten, die Messung ist so ausgeführt worden, daß die betreffenden Punkte des Stabes mit denjenigen des Meters zu *gleicher* Zeit verglichen wurden. Diese Art der Messung ist auch die einzige, aus welcher wir über die Gleichheit zweier Längen schließen können.

Wir wollen jetzt von den Bezugssystemen eins herausgreifen und dieses, zum Unterschiede von dem unsrigen, als gestrichenes bezeichnen (d. h. alle ihr zukommenden Größen mit Strichen versehen). Wir übergeben dem gestrichenen Beobachter die von uns angefertigte Kopie des Meters und verabreden mit ihm, er soll diese auch als Einheit benützen. Diese Kopie wird für uns jetzt als gestrichenes Meter erscheinen, und genau dasselbe in bezug auf unser Meter gilt für den gestrichenen Beobachter. Jeder Stab ist für jeden Beobachter ein Meter lang.

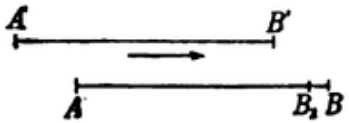


Fig. 1

Der gestrichene Beobachter bewege sich mit einer, von uns aus gemessen, konstanten Geschwindigkeit in der Richtung von A nach B (Fig. 1), und zugleich sei AB unser Meter. Wir stellen in A eine Uhr auf und beobachten den Zeitpunkt t_0, wo der Anfang B' des gestrichenen Meters an A vorbeikommt. Desgleichen merken wir uns den Zeitpunkt t_1, in Welchem der Punkt B' an B vorbeigeht und erhalten eine Zeitdifferenz $t_1 - t_0$. Dieselbe Art der Messung kann aber auch der gestrichene Beobachter mit seinem Meter und seiner Uhr machen und erhält eine entsprechende Zeitdifferenz $t'_1 - t'_0$. Da aber für jeden Beobachter der Maßstab ein Meter lang

ist, jeder Beobachter als ruhend angesehen werden kann und keiner vor dem anderen einen Vorzug hat, so folgen als unmittelbare Konsequenz die Beziehungen:

(1) $$t_1 - t_0 = t_1' - t_0'$$

(2) $$\frac{A'B'}{t_1' - t_0'} = \frac{AB}{t_1 - t_0}$$

D. h. bezeichnen wir durch q die relative Geschwindigkeit des gestrichenen Beobachters, von uns aus gemessen, und durch q' unsere Geschwindigkeit, vom gestrichenen Beobachter aus gemessen, so muß wegen (2), und da beide Geschwindigkeiten entgegengesetzt gerichtet sind, sein

(3) $$q = -q' = \frac{AB}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = \frac{100}{t_1 - t_0}\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$$

Wir wollen jetzt aber die Länge des gestrichenen Meters tatsächlich von uns aus messen. Zu dem Zweck verfahren wir genau so wie bei der Herstellung unserer Kopie. D. h. wir müssen zwei für uns ruhende und synchron laufende Uhren in einer solchen Entfernung AB_1, voneinander aufstellen, daß beim Vorbeigehen von $A'B'$ der Punkt A' mit dem Punkt A und B' mit B_1, für *uns zu gleicher Zeit* zusammenfallen.[5] Wie wir weiter (Nr. 6) sehen werden, ist dann $AB_1 < AB$ und uns wird es scheinen, als ob das gestrichene Meter sich verkürzt hat. Daraus dürfen wir aber nicht schließen, daß hier eine tatsächliche Verkürzung vorliegt, denn dasselbe könnte ja auch der gestrichene Beobachter von unserem Meter behaupten, und da haben wir keine Verkürzung beobachtet. Daß wir aber dennoch eine solche

scheinbare Verkürzung des bewegten Meters messen, folgt daraus, daß wegen (2) die Länge mit der Zeit verknüpft ist, was eine Folge des Relativitätsprinzips ist, und daß wir die Messung bei gleichzeitigem Stand der Uhren in A und B, ausführten. Eine solche Messung wollen Wir zur Abkürzung eine *synchrone* nennen. Aus dem Obigen ersehen wir, daß die richtige Länge eines Gegenstandes mit Hilfe einer synchronen Messung bei ruhendem Gegenstand gefunden werden kann. Bewegt sich der betreffende Gegenstand mit einer konstanten Geschwindigkeit, so ergibt eine synchrone Messung eine scheinbar verkürzte Länge des Gegenstandes.

3. Aufstellung der Transformationsgleichungen. Aus dem Relativitätsprinzip folgt, falls E irgend eine physikalische Größe bedeutet und durch eine Funktion φ irgend welcher Parameter $a_1, a_2, a_3 \ldots$ dargestellt werden kann, also falls

(1) $$E = \varphi\left(a_1, a_2, a_3 \ldots\right)$$

gilt, daß für den gestrichenen Beobachter dieselbe Funktion φ maßgebend ist, nur daß an Stelle von E jetztE' tritt und an Stelle der Parameter die gestrichenen Werte. D. h. für den gestrichenen Beobachter muß sein

(2) $$E' = \varphi\left(a'_1, a'_2, a'_3 \ldots\right)$$

Angenommen wir hätten E' durch die ungestrichenen Parameter ausgedrückt z. B.

(3) $$E' = f\left(a_1, a_2, a_3 \ldots\right)$$

dann muß, da das gestrichene und das ungestrichene System vollständig gleichwertig sind, auch gelten

$$E = f\left(a'_1, a'_2, a'_3 \ldots\right) \tag{4}$$

Die Gleichungen (1)—(4) bilden die mathematische Formulierung des Relativitätsprinzips. Da im allgemeinen a nicht gleich a' ist, so ersehen wir aus (1) — (4), daß tatsächlich x, y, z, t nicht gleich x', y', z', t' zu sein brauchen, da doch diese Größen auch zu den Parametern, die eine physikalische Größe bestimmen, gerechnet werden müssen. Betrachten wir nun rein kinematische Erscheinungen, so müssen wir eine Gleichung z. B. von der Form annehmen

$$x' = \varphi(x, y, z, t, q) \tag{5}$$

wo q die in der vorigen Nr. definierte Geschwindigkeit bedeutet und eine konstante Größe ist.

Wir bezeichnen durch $\mathfrak{c}_0$ den Einheitsvektor in der Richtung der Bewegung des gestrichenen Beobachters, vom ungestrichenen Beobachter aus beurteilt. In dieselbe Richtung legen wir die positive Richtung der X-Achse und der X'-Achse. Deshalb auch das negative Zeichen in (3) Nr. 2. Zur Vereinfachung nehmen wir außerdem noch an, daß die Verlängerung der

X

-Achse mit der X'-Achse zusammenfällt.

Den Raum müssen wir als homogen und isotrop auffassen. Deshalb hat in bezug auf ihn die Y-Achse vor der Z-Achse

keinen Vorzug, also können y und z in (5) nur implizite durch ϱ auftreten, wo ϱ die Entfernung eines Raumpunktes von der X-Achse bedeutet. Demnach hätten wir als Transformationsgleichungen folgende Beziehungen:

$$(6) \quad x' = f(x, \varrho, t, q),\ \varrho' = \varphi(x, \varrho, t, q),\ t' = \psi(x, \varrho, t, q),$$

und Wegen (3) und (4) folgt hieraus

$$(7)\ x = f(x', \varrho', t', q'),\ \varrho = \varphi(x', \varrho', t', q'),\ t = \psi(x', \varrho', t', q'),$$

Wir nehmen jetzt das vollständige Differential der Gleichungen (6) und erhalten

$$(8) \qquad \begin{cases} dx' = pdx + md\varrho + sdt \\ d\varrho' = kdx + ld\varrho + udt \\ dt' = p_1 dx + m_1 d\varrho + s_1 dt, \end{cases}$$

wo p, m, s usw. die entsprechenden partiellen Differentialquotienten bedeuten und selbst Funktionen von x, ϱ, t und q sein können.

Wir fassen jetzt einen beweglichen Punkt ins Auge, der sich mit einer beliebigen Geschwindigkeit v längs der X-Achse bewegt, und nehmen für dx in (8) den Wert an, welchen der betrachtete Punkt in der Zeit dt durchläuft. Es ist dann $dx = vdt$ und $d\varrho = 0$. Dann muß aber auch $d\varrho' = 0$ sein. Wir erhalten deshalb aus der zweiten Gleichung (8) $kv + u = O$.

Da aber k und u nicht von der Bewegung unseres willkürlich gewählten Punktes abhängen können und da außerdem v beliebig

ist, so folgt

(9) $$k = u = 0$$

und wir erhalten allgemein $d\varrho' = l d\varrho$.

Aber aus (3) und (4) ergibt sich $d\varrho = l' d\varrho'$ d. h.

(10) $$l' l = 1$$

Da der Übergang vom ungestrichenen System zum gestrichenen und umgekehrt vollständig gleichwertig ist, so muß $l = l'$ sein und wegen (10) $l = l' = 1$. Dies ergibt

(11) $$d\varrho' = d\varrho$$

oder, da wir angenommen haben, daß die X'-Achse die Verlängerung der X-Achse ist,

(11a) $$\varrho' = \varrho$$

und wir erhalten folglich statt (6)

(12) $$x' = f(x, \varrho, t, q),\ \varrho' = \varrho,\ t' = \psi(x, \varrho, t, q),$$

Die Gleichungen (12) geben uns an, wie man von den Koordinaten und der Zeit des gestrichenen Systems zu den betreffenden Größen des ungestrichenen Systems übergehen kann und umgekehrt. Diese Beziehungen sind eine Eigenschaft ausschließlich der gegenseitigen Bewegung der betreffenden Systeme und vollständig unabhängig von irgend einer Erscheinung. Da aber $\varrho' = \varrho$ ist, so müssen wir schließen, daß x', resp. t' nicht von ϱ abhängen können. Es muß also

(13) $$m_1 = m = 0$$

sein, und wir erhalten endgültig

(14) $$x' = f(x, t, q),\ \varrho' = \varrho,\ t' = \psi(x, t, q)$$

(15) $$x = f(x', t', q'),\ \varrho = \varrho',\ t = \psi(x', t', q')$$

und

(16) $$dx' = pdx + sdt,\ dt' = p_1 dx + s_1 dt$$

(17) $$dx = p' dx' + s' dt',\ dt = p'_1 dx' + s'_1 dt'$$

Wir nehmen auf der X'-Achse ein Element dx' und auf der X-Achse ein Element dx an, von solcher Länge, daß falls dx' in bezug auf das ungestrichene System *ruhte*, $dx' = dx$ wäre. Führen wir jetzt eine synchrone Messung des Elementes dx' vom ungestrichenen System aus, im Sinne von Nr. 2, so ist dabei $dt = 0$, und aus (16) ergibt sich dann

(18) $$dx' = pdx$$

Würde jetzt umgekehrt dx in bezug auf das gestrichene System in Ruhe gebracht, so würde sich $dx' = dx$ ergeben. Führen wir jetzt eine synchrone Messung des Elementes dx von dem ungestrichenen System aus, so folgt aus (17), da hier $dt' = O$ ist,

(19) $$dx = p' dx'$$

Da (18) für t= const. und (19) für t'=const. gilt, so können wir aus diesen beiden Gleichungen nicht schließen, daß $pp' = 1$ ist,

können aber dafür folgendes Resultat ableiten. Die Elemente dx' und das, in beiden Fällen gegenseitig zur Ruhe gebracht, ergeben $dx' = dx$. Da aber beide Systeme gleichberechtigt sind, so muß für beide Beobachter die gemessene Verkürzung gleich sein. D. h. es ist

$$p = p' \tag{20}$$

Bezeichnen wir durch D die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} p & p_1 \\ s & s_1 \end{vmatrix} = ps_1 - p_1 s \tag{21}$$

so folgt in leichter Weise aus (16) und (17)

$$p' = \frac{s_1}{D};\ s' = -\frac{s}{D};\ p_1' = -\frac{p_1}{D};\ s_1' = \frac{p}{D} \tag{22}$$

und weiter aus (20)

$$p^2 = s_1 s_1' \tag{23}$$

Es bleibt uns daher nur noch übrig, die Größen p, p_1 und s zu bestimmen. Bevor wir aber hierzu übergehen, müssen wir die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ eines beliebig bewegten Punktes aufstellen.

4. Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$. Die X - resp. die X'-Komponente der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ resp. $\mathfrak{v}'$ ist augenscheinlich

(1) $$\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} = \frac{dx}{dt}$$

und

(2) $$\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}' = \frac{dx'}{dt'}$$

Hieraus und aus (16) Nr. 3 erhalten wir

(3) $$dx' = dt\,(p\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} + s)$$

(4) $$dt' = A dt$$

wo

(5) $$A = s_1 + p_1 \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}$$

bedeutet. Demnach ist

(6) $$\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}' = \frac{s + p\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}}{A}$$

und entsprechend

(7) $$\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} = \frac{s' + p\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}'}{A'}$$

wo

(8) $$A' = s_1' + p_1' \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}'$$

ist. Aus (5), (6), (8) und aus (21), (22) Nr. 3 ergibt sich

$$AA' = 1 \tag{9}$$

Mit Hilfe von (9) und (21) Nr. 3 kann man sich leicht von der Richtigkeit von (7) überzeugen.

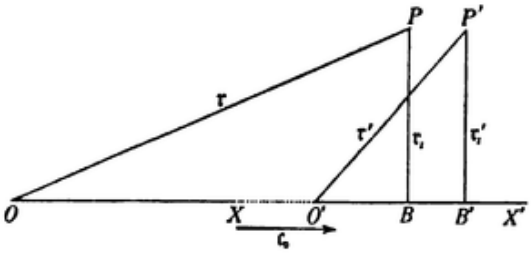


Fig. 2

Es bedeute O in Fig. 2 den Anfangspunkt des ungestrichenen Koordinatensystems und O' denjenigen des gestrichenen. P ist der bewegliche Punkt, gesehen vom ungestrichenen Beobachter, und P' bedeutet dasselbe für den gestrichenen Beobachter. Für den ungestrichenen Beobachter ist $OP = \mathfrak{r}$ der Radiusvektor von seinem Koordinatenanfang bis zu dem beweglichen Punkt und für den gestrichenen Beobachter wird dies $O'P' = \mathfrak{r}'$ sein. $OB = x$ und $O'B' = x'$. Obwohl P und P' ein und denselben Punkt darstellen, durften wir sie nicht als zusammenfallend zeichnen, sondern so wie in der Fig. 2, weil die Welt des ungestrichenen Beobachters etwas Unabhängiges in bezug auf die Welt des gestrichenen Beobachters ist. Wir wissen nur, daß die Verlängerung der X-Achse mit der X'-Achse zusammenfällt, und daß $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}'_1$ ist. Das letztere ergibt, daß die Punkte P und P' in einer Ebene, die durch die gemeinschaftliche Achse OO' geht, liegen werden und im gleichen Abstande von der Achse OO'. Sonst haben diese Welten nichts Gemeinsames miteinander. Wir

kommen im übrigen auf diese Frage noch einmal in Nr. 6 und 7 zurück.

Aus der Figur ist ersichtlich

(10) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}_0 x$$

Hieraus folgt, da $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1'$ ist,

(11) $$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}_0 x'$$

daher

(12) $$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}_0 dx'$$

oder wegen (16) Nr. 3

(13) $$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}_0 p dx + \mathfrak{c}_0 s dt = d\mathfrak{r} + \mathfrak{c}_0 (p-1) dx + \mathfrak{c}_0 s dt$$

Es ist aber bekanntlich

(14) $$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

und entsprechend

(15) $$\mathfrak{v}' = \frac{d\mathfrak{r}'}{dt'}$$

Demnach erhalten wir

(16) $$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{v} + s\mathfrak{c}_0}{A}$$

und entsprechend

(17) $$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{v}' + (p'-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{v}' + s'\mathfrak{c}_0}{A'}$$

5. Bestimmung der Größen p, s, p_1 und s_1. Ruht der Punkt, dessen Geschwindigkeit wir in der vorigen Nummer untersuchten, in bezug auf das gestrichene System, so ist $\mathfrak{v}' = 0$ und $\mathfrak{v}$ wird gleich $\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{v} = \mathfrak{c}_0 q$. Wir erhalten deshalb aus (16) voriger Nr.

(1) $$s = -pq$$

Ganz analog ergibt sich aus (17) Nr. 4, falls wir uns den Punkt in bezug auf das ungestrichene System als ruhend denken,

(2) $$s' = -p'q'$$

oder wegen (20) Nr. 3 und (2) Nr. 2

(3) $$s' = pq$$

und endlich wegen (22) Nr. 3

(4) $$s = -qs_1$$

Hieraus und aus (1) folgt

(5) $$s_1 = p$$

und aus (23) Nr. 3

(6) $$s_1' = p$$

Wir können deshalb schreiben

(7) $$dx' = pdx - pqdt,\ dt' = p_1 dx + pdt;$$

(8) $$dx = pdx' - pqdt',\ dt = p_1' dx' + pdt'$$

und

(9) $$D = p\,(p + p_1 q)$$

(10) $$p_1' = -\frac{p_1}{D}$$

Es bleibt uns also nur noch übrig, p und p_1 zu bestimmen.

Wir wollen das ungestrichene Koordinatensystem mit K und das gestrichene mit K' bezeichnen und führen noch ein drittes System K'' ein, das sich in derselben Richtung $\mathfrak{c}_0$ bewegt mit einer Geschwindigkeit q_2, gemessen von K. Die Geschwindigkeit von K', gemessen von K'' aus, ist q_1. Für das Paar K'', K' soll K'' dieselbe Rolle spielen wie K für das Paar K, K'. Dann folgt in Analogie mit (7)

(11) $$dx' = \bar{p}dx'' - \bar{p}q_1 dt'',\ dt' = \bar{p}_1 dx'' + \bar{p}dt''$$

Bei dem Paar K, K'' soll K dieselbe Rolle spielen wie bei dem Paar K, K'. Dann ist

(12) $$dx'' = p''dx - p''q_2 dt,\ dt'' = p_1'' dx + p'' dt.$$

Setzen wir diese Werte von dx'' und dt'' in (11) ein, so ergibt uns ein Vergleich mit (7)

(13) $$\begin{cases} p = \bar{p}\left(p'' + q_1 p_1''\right); & qp = \bar{p}p''\left(q_1 + q_2\right), \\ p_1 = \bar{p}_1 p'' + \bar{p}p_1''; & p = p''\left(\bar{p} - q_2\bar{p}_1\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\bar{p}\left(p'' - q_1 p_1''\right) = p''\left(\bar{p} - q_2\bar{p}_1\right)$$

oder

$$\bar{p}q_1 p_1'' = q_2 p''\bar{p}_1$$

d. h.

(14) $$\frac{p_1''}{q_2 p''} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}q_1}$$

Weiter folgt aus (13)

$$\frac{p_1}{pq} = \frac{\bar{p}_1 p'' + \bar{p}p_1''}{\bar{p}p''\left(q_1 + q_2\right)}$$

oder wegen (14)

$$\frac{p_1}{pq} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}q_1}$$

und demnach

(15) $$\frac{p_1}{pq} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}q_1} = \frac{p_1''}{q_2 p''}$$

Da hier in jedem Verhältnis nur Größen stehen, die vollständig voneinander unabhängig sind, und da außerdem $\mathfrak{c}_0$ willkürlich ist, so folgt aus (15), daß das Verhältnis $\frac{p_1}{pq}$ eine *universelle Konstante des Raumes* sein muß, Welche wir mit $-n$. bezeichnen Wollen. Wir haben demnach

(16) $$p_1 = -pqn$$

und folglich

(17) $$D = p^2 \left(1 - q^2 n\right)$$

Andererseits folgt aus (22) Nr. 3

$$p' = \frac{s_1}{D} = \frac{1}{p\left(1 - q^2 n\right)} = p$$

d. h.

$$p^2 = \frac{1}{1 - q^2 n}$$

und also

(18) $$p = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 n}}$$

Wir haben also alle Größen mit Hilfe der universellen Konstante bestimmt und können deshalb statt (7) und (8) schreiben, falls wir noch voraussetzen, wie dies im folgenden stets geschehen soll, daß für $t = O$ auch $t' = 0$ ist und O mit O' (Fig. 2) zusammenfällt:

(19) $$x' = px - pqt,\ t' = -pqnx + pt.$$

(20) $$x = px' + pqt',\ t = pqnx' + pt'.$$

(21) $$A = p\left(1 - nq\mathfrak{c}_0\mathfrak{v}\right)$$

Wir sind somit zu den bekannten *Lorentz*schen Transformationen gekommen, nur daß an Stelle von $1/c^2$ (wo c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet) hier die universelle Raumkonstante n steht.

Aus (19) und (20) ersieht man, daß der Übergang von dem ungestrichenen zum gestrichenen System einfach dadurch bewerkstelligt wird, daß man die gestrichenen Größen durch die ungestrichenen ersetzt und umgekehrt, und q durch $-q$. Diese Regel ist im folgenden stets anzuwenden.

Bei unserer Art der Ableitung der Transformationsgleichungen (19) und (20) haben wir jede spezielle physikalische Erscheinung ausgeschaltet und können deshalb n tatsächlich als eine Konstante des Raumes betrachten. Es bleibt uns nur noch übrig, den Zahlenwert dieser Konstante zu bestimmen. Da n eine universelle Konstante ist, so kann sie mit Hilfe einer beliebigen Erscheinung bestimmt werden. Am einfachsten geschieht dies aber mit Hilfe des Konvektionspotentials einer gleichförmig bewegten Punktladung[6]; man erhält dann

(22)
$$n = \frac{1}{c^2}$$

Der Ausdruck (18) für p kann nicht imaginär sein, d. h. q darf nicht größer als die Lichtgeschwindigkeit c werden. Nun ist aber q die Geschwindigkeit einer unserer Welten, resp. eines bestimmten Bezugssystems. Es kann sich also kein Bezugssystem mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen.

Wir denken uns jetzt im Raum unendlich viele Bezugssysteme, die sich von einem aus beurteilt (von uns aus, vom System K) alle *translatorisch*, nach allen möglichen Richtungen und mit allen möglichen *konstanten* Geschwindigkeiten $q(q \leqq c)$ bewegen.

Ein Bezugssystem ist aber kein mathematisches Gebilde, sondern eine substanzielle Welt mit ihren Beobachtern. Man kann deshalb annehmen, daß, bei einer beliebigen Bewegung eines *substanziellen* Punktes, unter den obigen Bezugssystemen sich immer eins finden läßt, welches sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt wie der betreffende substanzielle Punkt im Moment t. Mit anderen Worten, es ruht der substanzielle Punkt im Moment t in bezug auf das betreffende System, welches man als *Ruhekoordinatensystem* bezeichnet. Es wird also der substanzielle Punkt während seiner Bewegung in bezug auf alle aufeinander folgenden Ruhekoordinatensysteme hintereinander in Ruhe sein. Man bezeichnet diese Art der Betrachtungsweise als eine Transformation auf Ruhe.[7]

Aus dem eben Gesagten schließen wir, daß auch ein substanzieller Punkt sich nicht mit einer größeren Geschwindigkeit als c bewegen kann. Oder richtiger gesagt, wir werden bei der

Bewegung eines substanziellen Punktes immer Geschwindigkeiten messen, die nie größer als c sind[8].

6. Folgerungen aus den Transformationsgleichungen. Führen wir eine Transformation von dem ungestrichenen System auf das gestrichene auf Grund der *Newton*schen Mechanik aus, ohne auf das Relativitätsprinzip Rücksicht zu nehmen, so erhalten wir

$$x' = x - qt, \; t' = t \tag{1}$$

Ein Vergleich mit (19) Nr. 5 ergibt, wegen der Bedeutung von p, daß diese letzteren Gleichungen in die obigen (1) übergehen, falls wir $n = 0$ setzen. Und dies gilt allgemein d. h. *alle mechanischen Folgerungen, die auf Grund des Relativitätsprinzips abgeleitet sind, gehen in entsprechende der Newtonschen Mechanik über, falls wir in den ersteren* $n = O$ *setzen*.

Wir führen jetzt eine synchrone Messung einer Strecke $x' - x'_1$ aus. Aus (19) Nr. 5 folgt dann

$$x' - x'_1 = p\,(x - x_1) \tag{2}$$

Wäre die Strecke $x' - x'_1$ in Ruhe in bezug auf das ungestrichene System, also $q = O$, so Würde aus (2) folgen, daß dann $x' - x'_1 = x - x_1$ ist. Da dies aber nicht der Fall ist und wir als Ergebnis der Messung die Strecke $x - x_1$ erhalten, so lehrt (2), da $p > 1$ ist, daß für uns $x' - x'_1$ sich scheinbar verkürzt hat (siehe Nr. 2).

Aus der Gleichung (11) Nr. 4 folgt wegen (19) Nr. 5 und weil $\mathfrak{c}_0\mathfrak{r} = x$ ist (Fig. 2),

(3) $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}_0 x' = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{c}_0(px - pqt) = \mathfrak{r} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{r} - \mathfrak{c}_0 pqt$

oder auch

(4) $$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{c}_0 qt + \mathfrak{c}_0(p-1)(x - qt)$$

Führen wir die Bezeichnung

(5) $$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r} - \mathfrak{c}_0 qt$$

ein, so ersehen wir (Fig. 3), daß $\mathfrak{r}_2 = O'P$ ist, denn OO' ist gleich $\mathfrak{c}_0 qt$. Nach der *Newton*schen Mechanik würde $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}'$ sein. Dies folgt auch aus (4), denn für $n = 0$ wird $p = 1$, und das letzte Glied in (4) fällt dann weg.

Es ist

(6) $$\mathfrak{c}_0\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{c}_0(x - qt)$$

Deshalb können wir auch statt (4) schreiben

(7) $$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_2 + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{r}_2$$

Weiter folgt, wie leicht zu verifizieren ist,

(8) $$\mathfrak{c}_0 x' = p\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{r}_2$$

Der Sinn der rechten Seite von (7) ist folgender. Der ungestrichene Beobachter kennt, indem er den Punkt P beobachtet, die Strecke $\mathfrak{r}$. Zugleich kennt er OO', welche gleich

$\mathfrak{c}_0 qt$ ist. Deshalb ist ihm auch $\mathfrak{r}_2$ bekannt. Um jetzt die Lage des Punktes für den gestrichenen Beobachter zu bestimmen, d. h. den Punkt P', muß er wegen (7) zu $\mathfrak{r}_2$ die Strecke $(p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{r}_2$ addieren, d. h. aber, daß

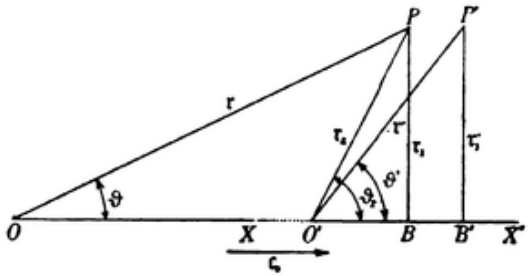


Fig. 3

(9) $$PP' = (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{r}_2$$

ist. Es hat sich also $\mathfrak{r}'$ um die Strecke PP' verkürzt und Wegen (8) $O'B'$ in $O'B$ verwandelt, wobei $O'B > O'B$ ist, was mit dem im Anschluß an (2) Gesagten übereinstimmt.

Gesetzt, wir hätten zwei Punkte P und P_1 und entsprechend P' und P_1'. Der Abstand dieser Punkte, gemessen in der Richtung der X-Achse, vom ungestrichenen Beobachter aus, sei $\mathfrak{c}_0 a$. Der Abstand $P'P_1'$ dieser beiden Punkte für den gestrichenen Beobachter in der Richtung der X'-Achse ist wegen (7) gleich. der Differenz der entsprechenden Radienvektoren $\mathfrak{r}'$ multipliziert mit $\mathfrak{c}_0$.

Hieraus erhalten wir

(10) $$P'P_1' = \mathfrak{c}_0 a + (p-1)\mathfrak{c}_0 a = pa\mathfrak{c}_0$$

und sehen, daß diese Länge unabhängig ist von der Länge der beiden Punkte in bezug auf das Koordinatensystem. Da $p > 1$ ist,

so ergibt sich Wieder, daß sich die Entfernung der beiden Punkte in Richtung, der Bewegung verkürzt hat. Hieraus folgt auch das bekannte Resultat, daß eine im gestrichenen System befindliche Kugel für den ungestrichenen Beobachter als ein in der Richtung der Bewegung abgeplattetes Rotationsellipsoid erscheint.

Aus den obigen Erörterungen ist es klar, warum wir die beiden Punkte P und P' nicht zusammenfallend gezeichnet haben. Es sind tatsächlich die Systeme OPB und $O'P'B'$ zwei voneinander unabhängige Welten.

Wir müssen hier auf eine Analogie mit der Optik hinweisen, die sich als sehr fördernd zum Verständnis der Sache erweist. Bekanntlich haben wir in der Optik einen Objekt- und einen Bildraum und eine gemeinsame optische Achse. Objekt- und Bildraum sind untereinander vertauschbar. In unserem Falle können wir das System OPB als Objektraum und das System $O'P'B'$ als Bildraum auffassen oder auch umgekehrt, da auch hier beide Systeme vertauschbar sind. Die Achse der relativen Geschwindigkeit, d. h. die Richtung $\mathfrak{c}_0$, vertritt hier die optische Achse. Berücksichtigen wir noch, daß n eine universelle Konstante des Raumes ist, so können wir tatsächlich sagen, der Raum besitze die Eigenschaft, die Gegenstände abzubilden, und zwar für jeden Beobachter anders, je nachdem er sich bewegt.

Daß es sich tatsächlich um eine Abbildung und nicht um eine wirkliche Verzerrung handelt, erhellt aus folgender Überlegung. Wie gesagt, wird eine Kugel im gestrichenen System dem ungestrichenen Beobachter als ein in der *Richtung der Relativbewegung* abgeplattetes Rotationsellipsoid erscheinen. Für eine dritte Welt, die sich in einer anderen Richtung in bezug auf dasselbe gestrichene System bewegt, wird diese selbe Kugel in

Richtung der anderen Relativbewegung als abgeplattetes Rotationsellipsoid erscheinen. Deshalb kann von einer wirklichen Verzerrung keine Rede sein.

Betrachten wir noch einmal näher die Ableitung von (10). Da in (6) die Zeit enthalten ist, so haben wir bei der Bestimmung der Größe a implizite angenommen, daß diese Entfernung a an ihren Endpunkten zu gleicher Zeit gemessen wurde, d. h. bei einem bestimmten Wert von OO', haben also mit anderen Worten eine synchrone Messung gemacht und zugleich vorausgesetzt, daß die Punkte P' und P_1' in bezug auf das gestrichene System ruhen. Und nur in diesem Falle wird die Gleichung (10) richtig sein. Bewegen sich die Punkte P' und P_1' irgendwie in bezug auf das gestrichene System, so gilt Gleichung (10) nicht. Wir kommen weiter darauf zurück. Wir können weiter fragen: Wie wird ein zum gestrichenen System ruhender Körper durch den Raum im ungestrichenen System abgebildet? Die Antwort ist sehr einfach. Zwei Gerade, die in einer zu $\mathfrak{c}_0$ senkrechten Ebene liegen, behalten ihre Länge und den Winkel zwischen ihnen bei. Gerade, die in einer Ebene liegen, die durch $\mathfrak{c}_0$ geht, werden erstens wieder als Gerade abgebildet. Dies erhellt aus (10), denn die Verkürzung ist proportional der Projektion der betreffenden Geraden auf die X-Achse. Zweitens werden die Geraden verkürzt, und zwar, bezeichnet $\mathfrak{R}'$ die Strecke im gestrichenen System und $\mathfrak{R}$ dieselbe Strecke im ungestrichenen System, so ist wegen (10), da die zu $\mathfrak{c}_0$ normale Komponente von $\mathfrak{R}'$ gleich $\mathfrak{R}' - \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{R}'$ ist,

$$(11)\ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}' - \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{R}' + \frac{\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{R}'}{p} = \mathfrak{R}' - \frac{(p-1)}{p}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{R}'$$

Drittens endlich ändert sich der Winkel zwischen zwei Strecken $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}'_1$ bei der Abbildung. Bezeichnet ϑ' den Winkel zwischen $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}'_1$ im gestrichenen System und ϑ denselben Winkel im ungestrichenen System, so haben wir

$$\cos\vartheta' = \frac{\mathfrak{R}'\mathfrak{R}'_1}{r'r'_1} \tag{12}$$

und

$$\cos\vartheta = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{R}_1}{rr_1} \tag{13}$$

wo die r die entsprechenden Beträge der Strecken $\mathfrak{R}$ bedeuten. Setzen wir (11) in (13) ein und beachten, daß $rr_1 = \sqrt{\mathfrak{R}^2\mathfrak{R}_1^2}$ ist, so erhalten wir

$$\cos\vartheta' = \frac{\mathfrak{R}'\mathfrak{R}'_1 - b\mathfrak{c}_0\mathfrak{R}'_1 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{R}'}{\sqrt{\left\{\mathfrak{R}'^2 - b(\mathfrak{c}_0\mathfrak{R}')^2\right\}\left\{\mathfrak{R}'^2_1 - b(\mathfrak{c}_0\mathfrak{R}'_1)^2\right\}}} \tag{14}$$

wo

$$b = \frac{p^2 - 1}{p^2} = q^2 n \tag{15}$$

bedeutet. Bezeichnen wir mit γ' und γ'_1 die Winkel, die $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}'_1$ mit der X'-Achse bilden, so folgt unmittelbar aus (14)

(16)
$$\cos\vartheta = \cos\vartheta' \frac{1 - b\frac{\cos\gamma'\cdot\cos\gamma_1'}{\cos\vartheta'}}{\sqrt{(1 - b\cos^2\gamma')\,(1 - b\cos^2\gamma_1')}}$$

Wir sehen also, daß bei konstantem ϑ', aber bei verschiedener Lage der Strecken $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}_1'$ (also bei veränderlichen γ' und γ_1') sich ϑ ändern wird.

Um ein einfaches Beispiel zu geben, kehren wir zu der Fig. 3 zurück und setzen $O'P' = \mathfrak{R}'$, $O'B' = \mathfrak{R}_1'$, $O'P = \mathfrak{R}$ und $O'B = \mathfrak{R}_1$, dann ist $\vartheta' = \vartheta'$, $\vartheta = \vartheta_2$, $\gamma' = \vartheta'$ und $\gamma_1' = 0$, und wir erhalten aus (16)

(16a)
$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_2 = \frac{1}{p}\frac{\cos\vartheta'}{\sqrt{1 - b\cos^2\vartheta'}}$$

Wir haben bis jetzt nur von einer rein geometrischen Abbildung gesprochen. Da aber, wie aus Nr. 2 ersichtlich, Raum und Zeit auf das engste verknüpft sind, so müssen wir auch annehmen, daß auch die Zeit abgebildet wird. Und tatsächlich geschieht dies nach einem ganz bestimmten Gesetz, wie wir dies gleich sehen werden.

Es sei wieder in Fig. 3 P der bewegliche Punkt, dessen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ resp. $\mathfrak{v}'$ ist. Aus (16) Nr. 4 erhalten wir leicht unter Berücksichtigimg der Bedeutung von p und A

(17)
$$1 - n\mathfrak{v}'^2 = \frac{1 - n\mathfrak{v}^2}{A}$$

oder

(18) $$A = \frac{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2}}$$

Dies in (4) Nr. 4 eingesetzt, ergibt

(19) $$dt' \sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2} = dt \sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}$$

Eine überaus wichtige Beziehung. Es stehen auf jeder Seite dieser Gleichung Größen, die sich nur auf das betreffende System beziehen. Denn der gestrichene Beobachter mißt dt' und $\mathfrak{v}'$ unabhängig von der Existenz des ungestrichenen Beobachters. Dasselbe gilt für den ungestrichenen Beobachter. Bezeichnen wir

(20) $$dt \sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2} = d\tau$$

so ist $d\tau$ also eine Invariante und zwar für alle unsere Welten. Die Größe τ nennt man die *Eigenzeit*.

Aus (20) folgt

$$t = \int_0^t dt = \int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} \tag{21}$$

$$\tau = \int_0^\tau d\tau = \int_0^t dt\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2} \tag{22}$$

Hieraus ergibt sich, daß τ stets kleiner als t ist. D. h. beobachtet man von irgendeinem der Bezugssysteme die Bewegung eines Punktes, so wird die gemessene Zeitdauer der Bewegung immer größer als τ sein. Es gibt kein Bezugssystem, auf welchem wir für die Zeitdauer der Bewegung die Größe τ bekämen. Anderseits gibt es auch keine Uhr, die uns die Zeit τ anzeigen würde, denn alle Uhren geben uns nur die Zeit t oder t' an, je nach dem Bezugssystem, auf welchem wir uns befinden. Dann und nur dann, wenn der Punkt zu einem der Bezugssysteme ruht, also $\mathfrak{v} = 0$ ist, zeigt die Uhr die Eigenzeit an, d. h. die Zeit, die uns angibt, wie lange der Punkt in bezug auf das betreffende Bezugssystem ruht. Aus (20) folgt zugleich das Gesetz, nach welchem der Raum die Abbildung der Zeit von einem Bezugssysteme auf das andere besorgt.

Was sollen wir uns aber überhaupt unter der Eigenzeit τ vorstellen? Zu dem Zweck verfolgen wir die Bewegung eines substanziellen Punktes und transformieren ihn auf Ruhe. Dann folgt aus (20) $\mathfrak{v} = 0$ und $dt = d\tau$. Wir können deshalb sagen, daß

τ nichts anderes ist, als die zeitliche Summe der Aufenthalte des betreffenden Punktes auf den aufeinander folgenden Ruhekoordinatensystemen, gemessen nach der entsprechenden Zeit eines jeden Systems. Genau so, wie wenn wir in einem Eisenbahnzug fahren und nur die Zeiten summieren würden, welche der Zug auf den Stationen verbrachte, und noch dazu unter der Bedingung, daß die Uhren auf jeder Station verschieden gehen.

Betrachten wir eine Uhr im gestrichenen System, so ruht sie zu ihm und zeigt die Zeit t' an. Es ist also $\mathfrak{v}^2 = q^2$, und wir erhalten dann (da $\mathfrak{v}' = 0$ ist)

(23) $$t\sqrt{1 - nq^2} = \frac{1}{p} = t'$$

D. h. für den gestrichenen Beobachter wird die Uhr im ungestrichenen System schneller laufend erscheinen, da $p > 1$ ist. Umgekehrt folgt aus (23)

(24) $$\frac{t'}{p'} = \frac{t'}{p} = t$$

Also auch dem ungestrichenen Beobachter wird eine Uhr im gestrichenen System schneller laufend erscheinen. Außerdem werden die im gestrichenen System ruhenden und synchron laufenden Uhren für den ungestrichenen Beobachter nicht synchron laufen, sondern eine konstante Zeitdifferenz zeigen, je nach ihrer Lage im gestrichenen System. Dies folgt sofort aus (19) Nr. 5. Setzen wir dort den Wert von x aus der ersten Gleichung in die zweite, so erhalten wir

(25)

$$t' = -qnx' + pt\left(1 - q^2 n\right) = -qnx' + \frac{t}{p}$$

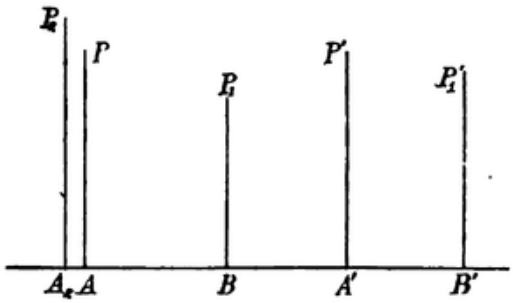
Für einen andern Punkt x'_1 wird entsprechend sein

(26) $$t'_1 = -qnx'_1 + \frac{t_1}{p}$$

In den beiden Punkten x' und x'_1 befinden sich aber im gestrichenen System synchron laufende Uhren. Dann ist $t'_1 = t'$ und die Differenz von (25) und (26) ergibt

(27) $$pqn\left(x'_1 - x'\right) = t_1 - t$$

Hierdurch ist die oben erwähnte konstante Zeitdifferenz der im gestrichenen System synchron laufenden Uhren für den ungestrichenen Beobachter bestimmt. Eine Uhr, die im Sinne der Relativbewegung für den ungestrichenen Beobachter weiter liegt $x'_1 - x'$ positiv), wird ihm voreilend erscheinen in bezug auf eine näher liegende Uhr. Dabei werden ihm aber zugleich beide Uhren schneller gehend erscheinen. Uhren, die im gestrichenen System synchron laufen und auf einer Ebene senkrecht zu $\mathfrak{c}_0$ liegen, laufen auch für den ungestrichenen Beobachter synchron, aber schneller.



Jetzt wird es uns auch verständlich werden, warum (10) im allgemeinen nur dann gilt, wenn die beiden Punkte in bezug auf eins der Systeme ruhen. Denn gesetzt, sie bewegten sich

Fig. 4

beliebig und befänden sich in einem Zeitpunkt t' für den gestrichenen Beobachter in P' und P_1' (Fig. 4). In demselben Moment t' werden sie sich für den ungestrichenen Beobachter in P und P_1 befinden, wobei augenscheinlich $PA = P'A'$ und $P_1B = P_1'B'$ sein wird. Aber die Zeit, in welcher sich die Punkte in P und P_1 befinden, wird wegen (27) für den ungestrichenen Beobachter nicht die gleiche sein. Es sei P_2 die Lage des Punktes P, welche er zu der Zeit einnimmt, die dem Punkte P_1 entspricht. Augenscheinlich wird der ungestrichene Beobachter in einem solchen Moment die Entfernung der beiden Punkte messen. Hierbei erhält er als Projektion auf $\mathfrak{c}_0$ die Strecke A_2B, und das Verhältnis $\frac{A_2B}{A'B'}$ wird von der Bewegung der Punkte abhängen. Wenn aber die Punkte in bezug auf das gestrichene System ruhen, so ist $PA = P'A' = \text{const.}$, $P_1B = P_1'B' = \text{const.}$ und desgleichen $\frac{A'B'}{AB} = \text{const.} = p$. Das Verhältnis der Entfernungen verliert seinen Sinn, falls sich die Punkte beliebig bewegen, denn es ist in diesem Falle unbestimmt, zu welcher Zeit diese Entfernungen gemessen werden. In Ausnahmefällen gilt aber (10) dennoch, wenn sich auch die Punkte bewegen, z. B. wenn sich P' und P_1' längs $P'A'$ und $P_1'B$ bewegen, denn dann ist

$$t\frac{A'B'}{AB} = \text{const.} = p.$$

Wir nehmen $O'P'$ (Fig. 3) als eine Strecke an, die in bezug auf das gestrichene System ruht, und es soll jetzt der ungestrichene Beobachter eine synchrone Messung dieser Strecke ausführen. Zu dem Zweck muß er seinen Maßstab in der Richtung $O'P$ halten, dann werden beim Vorübergehen der Strecke $O'P'$ die Punkte O'

und P' mit den Punkten O' und P für den ungestrichenen Beobachter zu gleicher Zeit zusammenfallen. Dies folgt deshalb, weil $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1'$ ist und weil die Projektionen $O'B$ und $O'B'$ in der Beziehung (10) zueinander stehen. Noch anschaulicher läßt sich dies mit Hilfe der Beziehungen (23) resp. (24) zeigen. Wie gesagt, kommen hierbei nur die Projektionen $O'B$ und $O'B'$ in Betracht. Wir denken uns, der Beobachter im gestrichenen System merke sich einen Punkt auf der X-Achse des ungestrichenen Systems und die Zeitdauer t', nach seiner Uhr beurteilt, welche nötig ist, damit der gemerkte Punkt die Strecke $O'B'$ durchläuft, es ist dann

$$t' = \frac{O'B'}{q}$$

oder wegen (10)

$$t' = \frac{pO'B'}{q} \tag{28}$$

Dasselbe tut jetzt ein Beobachter im ungestrichenen System in bezug auf $O'B$ und erhält

$$t = \frac{O'B}{q} \tag{29}$$

Aus (28) und (29) ergibt sich dann

$$\frac{t'}{p} = t$$

was mit (24) übereinstimmt. D. h. die beiden Strecken sind einander gleich unter Voraussetzung einer synchronen Messung.

7. Einige Beispiele. Wir wollen jetzt eine beliebige Bewegung eines Punktes verfolgen und sehen, wie die entsprechende Bahnkurve, von beiden Systemen aus betrachtet, erscheint.

Infolge von (8) Nr. 6 ist

$$x' = px_2 = p(x - qt) \tag{1}$$

und entsprechend

$$x' = px_2' = p(x' + qt') \tag{2}$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen ist folgende. Es sei (Fig. 5) AB die Bahnkurve im ungestrichenen System. Projiziert jetzt der ungestrichene Beobachter die von ihm beobachtete Kurve nach der *Newton*schen Art auf das gestrichene System, indem er seine Zeit zugrunde legt, so erhält er die Kurve AB_1, wobei wegen (1) $x_2 = x - qt$ ist. Um jetzt die tatsächlich vom gestrichenen Beobachter wahrgenommene Kurve zu erhalten, muß er die Abszissen x_2, p-mal vergrößern ($p > 1$) und bekommt dann die gesuchte Kurve AB', wobei $x' = px_2$ ist.

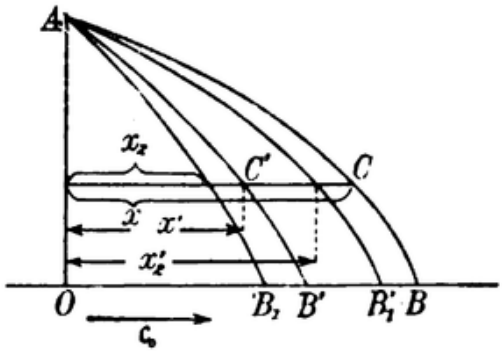


Fig. 5

Projiziert jetzt der gestrichene Beobachter seine beobachtete Bahnkurve AB' nach *Newton*scher Art, unter Zugrundelegung

seiner Zeit auf das ungestrichene System, so erhält er die Kurve AB'_1, wobei $x'_2 = x' + qt'$ ist. Um jetzt die Wahre Kurve im ungestrichenen System zu erhalten, muß der gestrichene Beobachter die Abszissen x'_2 auch p-mal vergrößern und bekommt dann die gesuchte Kurve AB, wobei $x = px'_2$ ist.

Obige Erörterungen gelten auch für Raumkurven, nur daß dann an Stelle der x die Entfernungen der entsprechenden Punkte von einer zu $\mathfrak{c}_0$ senkrechten und durch den Punkt O (Fig. 5) gehenden Ebene zu nehmen sind.

Wir wollen im folgenden als anfängliches System das gestrichene betrachten und von ihm aus zum ungestrichenen übergehen.

Die Zeit, welche der Punkt braucht, um im gestrichenen System von A nach C' zu kommen, ist t'. In demselben Moment t' ist der Punkt im ungestrichenen System in C und braucht dabei, in demselben System, die Zeit t. Zwischen t und t' besteht die Beziehung (25) Nr. 6, d. h. es ist

(3) $$t = pt' + pqnx'$$

Ist t'_1 die Zeit, welche der Punkt im gestrichenen System braucht, um die ganze Kurve AB' zu durchlaufen und t_1 die entsprechende Zeit im ungestrichenen System für die Kurve AB, so folgt aus (3)

(4) $$t_1 = pt'_1 + pqnx'_1$$

wobei

(5) $$x'_1 = OB'$$

ist.

Die Beziehung (3), resp. (4) läßt sich noch plausibler machen durch folgende Überlegung. Um die Zeit t'_1 zu bestimmen, braucht der gestrichene Beobachter zwei ruhende und synchron laufende Uhren: eine im Anfangspunkt und eine im Endpunkt der Bahnkurve. Es ist also t'_1 nichts anderes als die Differenz der beiden Ablesungen an den zwei Uhren. Der gestrichene Beobachter möchte jetzt aber die Zeitdauer t_1 des ungestrichenen Beobachters bestimmen. Er kalkuliert also folgendermaßen. Jede seiner Uhren geht auf Grund von **Nr. 6** langsamer als die des ungestrichenen Beobachters. Also beobachtet der letztere auf jeden Fall eine Zeitdauer $t'_1 p$. Der Abstand der beiden Uhren im gestrichenen System, gemessen in demselben System in der Richtung von $\mathfrak{c}_0$, ist x'_1, positiv, falls der Endpunkt der Bahnkurve in der Richtung von $\mathfrak{c}_0$ vor dem Anfangspunkt liegt. Wegen (27) **Nr. 6** kommt also noch eine Zeitdifferenz, die der ungestrichene Beobachter wahrnehmen muß, in Betracht. Diese Zeitdifferenz, welche gleich $pqnx'_1$ sein wird, muß der gestrichene Beobachter zu $t'_1 p$ hinzufügen, um t_1 zu erhalten. D. h. wir kommen so zu dem Ausdruck (4).

Befindet sich der Anfangs- und der Endpunkt der Bahnkurve im gestrichenen System auf einer zu $\mathfrak{c}_0$ senkrechten Ebene, oder liegt die Bahnkurve ganz in dieser Ebene, oder endlich ist die Bahnkurve geschlossen, dann ist $x'_1 = 0$, und es wird

(6) $$t_1 = t'_1 p$$

sein.

Erstes Beispiel. Es rolle in einem Eisenbahnwagen eine Kugel auf einer schiefen Ebene mit einer konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$, vom Passagier aus gemessen. Die Bahnkurve im Wagen sei die Gerade $A'B'$ (Fig. 6) und $\mathfrak{c}_0$ die Richtung der Bewegung des Wagens. Die nach der *Newton*schen Art, vom Passagier aus, abgebildete Bahnkurve ist die Gerade $A'B_1$, wobei $B'B_1 = qt'$ ist und q die Zuggeschwindigkeit bedeutet. Die tatsächlich vom ruhenden Beobachter aus wahrgenommene Bahnkurve ist die Gerade $A'B$, wobei

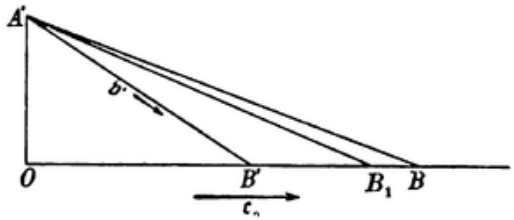


Fig. 6

$$BB_1 = (p-1)OB_1 = OB_1 \frac{1-\sqrt{1-q^2n}}{\sqrt{1-q^2n}}$$

ist.

Aus (17) **Nr. 4** folgt, da hier $A' = p\left(1 + nq\mathfrak{c}_0\mathfrak{v}'\right)$ ist

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{v}' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{v}' + pq\mathfrak{c}_0}{p\left(1 + nq\mathfrak{c}_0\mathfrak{v}'\right)} \tag{7}$$

Da aber $\mathfrak{v}'$ konstant ist, so gilt dies wegen (7) auch für $\mathfrak{v}$.

Ist t_1 die Zeitdauer der Bewegung für den ruhenden Beobachter und t_1' für den Passagier, so folgt aus (4)

(8) $$t_1 = t_1' p + pqnx_1' = t_1' p + pqnOB'$$

Wir wollen dies direkt nachweisen.

$$\tau = \int_0^{t_1} dt\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2} = t_1\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}$$

$$\tau = \int_0^{t_1'} dt'\sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2} = t_1'\sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2}$$

d. h.

$$t_1 = \frac{t_1'\sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} = \frac{t_1'}{A} = t_1' A' = t_1' p + t_1' pqnq\mathfrak{c}_0\mathfrak{v}'$$

Da aber $t_1'\mathfrak{c}_0\mathfrak{v}' = OB'$ ist, so ist hiermit obige Gleichung (8) verifiziert.

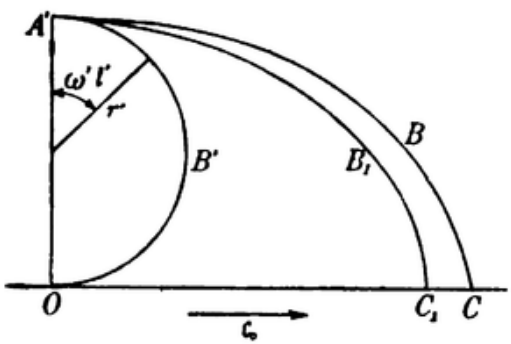


Fig. 7

Zweites Beispiel. Die Bahnkurve im gestrichenen System sei ein Halbkreis mit dem Radius r'. Die Winkelgeschwindigkeit ω' sei konstant, vom gestrichenen System aus gemessen. Der Anfangspunkt A' und der Endpunkt O der

Bahnkurve liegen auf einem zu $\mathfrak{c}_0$ senkrechten Durchmesser (Fig. 7). Dann ist die Gleichung (6) anzuwenden, und wir haben

(9) $$t_1 = t_1' p$$

Auch dies wollen wir direkt nachweisen.

$$\tau = \int_0^{t_1'} dt' \sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2} = t_1' \sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2} = \int_0^{t_1} dt \sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2} = \sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2} \int_0^{t_1} dt A$$

also

(10) $$t_1' = t_1 p - pqn \int_0^{t_1} dt \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}$$

Aus (17) $Nr.4$ erhalten wir

(11) $$\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}' + q}{1 + nq\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}'}$$

und aus der Fig. 7

(12) $$\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}' = \omega' r' \cos \omega' t'$$

Es ist also

(13) $$\int_0^{t_1} dt \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} = \int_0^{t_1'} dt' A' \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} = p \int_0^{t_1'} dt' \left(\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}' + q\right) = pqt_1' + p\omega' r' \int_0^{t_1'} dt' \cos \omega' t'$$

Das letzte Integral verschwindet bei der Integration längs eines Halbkreises, und wir erhalten aus (10) und (13)

$$t_1' = t_1 p - p^2 q^2 n t_1'$$

oder

$$t_1' \left(1 + p^2 q^2 n\right) = t_1' p^2 = t_1 p'; \text{ d. h. } t_1 = t_1' p$$

in Übereinstimmung mit (9).

Die Kurve $A'B'O$, nach der *Newton*schen Art abgebildet, ergibt die Kurve $A'B_1C_1$. Die tatsächlich vom ungestrichenen Beobachter wahrgenommene Kurve ist $A'BC$. Aus (2) folgt $OC = x = pqt_1'$.

Drittes Beispiel. Ein Passagier lasse im Zuge einen Gegenstand fallen. Für ihn ist dann die Bahnkurve eine Gerade, senkrecht zu $\mathfrak{c}_0$. Diese Gerade nach *Newton*scher Art abgebildet, ergibt eine Parabel. Die vom ruhenden Beobachter wahrgenommene Kurve wird auch eine Parabel sein, nur mit p mal größeren Abszissen. Zwischen der Zeitdauer t_1' der Bewegung für den Passagier und derjenigen t_1 für den ruhenden Beobachter besteht die Beziehung (6).

8. Linien-, Flächen- und Volumenelemente. Bevor wir zu den Anwendungen des Relativitätsprinzipes auf einige Gebiete der theoretischen Physik übergehen, müssen wir die Vektoranalysis diesem Prinzip anpassen und müssen deshalb vorerst wissen, wie sich hierbei Linien-, Flächen- und Volumenelemente transformieren werden.

Auf Grund von (19) Nr. 5 erhalten wir, ganz analog wie (3) Nr. 6, für die Entfernung zweier benachbarter Punkte eines bewegten Mediums

(1) $$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r} + (p+1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r} - pqdt\mathfrak{c}_0$$

und

(2) $$d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}' + pqdt'\mathfrak{c}_0$$

Hier bedeutet $d\mathfrak{r}$ bzw. $d\mathfrak{r}'$ nicht die vom ungestrichenen Beobachter (System K), resp. vom gestrichenen Beobachter (System K'), synchron gemessene Entfernung der beiden Punkte, sondern die Entfernung derjenigen zum System K, resp. K' festen Raumpunkte, in welchen sich die beiden beweglichen Punkte zu den Zeiten t_1 und t_2, resp. t_1' und t_2' befanden. Es ist also $t_2 - t_1 = dt$ und $t_2' - t_1' = dt'$.[9]

Wir nehmen nun an, der gestrichene Beobachter messe die Entfernung der beiden beweglichen Punkte synchron und zwar im Moment t'. Dann ist $dt' = 0$ und

(3)[10] $$dt = qn\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}$$

(4)[10] $$d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{v}dt = d\mathfrak{r}_2 + qn\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}$$

wo $d\mathfrak{r}_2$ die vom ruhenden Beobachter synchron gemessene Entfernung der beiden Punkte bedeutet, zu einer Zeit t, Welche dem Moment t' entspricht.

Multiplizieren wir (4) skalar mit $\mathfrak{c}_0$, so erhalten wir

(5)

$$\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}_0}{1 - qn\mathfrak{c}_0\mathfrak{v}}$$

Es folgt deshalb aus (1), indem wir wieder $d\mathfrak{r}$ statt $d\mathfrak{r}_2$ schreiben,

$$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r} + pqn\mathfrak{v} \cdot \frac{\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}}{A} - \frac{(p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}}{A} \tag{6}$$

wo jetzt aber $d\mathfrak{r}'$ und $d\mathfrak{r}$ die von K', resp. K aus synchron gemessenen Linienelemente bedeuten.

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist diejenige des unendlich kleinen Volumenelementes, des bewegten Mediums, innerhalb dessen sich das Linienelement $d\mathfrak{r}$ befindet.

Innerhalb dieses Volumenelementes nehmen wir drei nicht in einer Ebene liegende Linienelemente und erhalten dann für diese

$$\begin{cases} d\mathfrak{r}_1' = d\mathfrak{r}_1 + pqn\mathfrak{v} \cdot \dfrac{\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}_1}{A} - \dfrac{(p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}_1}{A} \\ d\mathfrak{r}_2' = d\mathfrak{r}_2 + pqn\mathfrak{v} \cdot \dfrac{\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}_2}{A} - \dfrac{(p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}_2}{A} \\ d\mathfrak{r}_3' = d\mathfrak{r}_3 + pqn\mathfrak{v} \cdot \dfrac{\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}_3}{A} - \dfrac{(p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{r}_3}{A} \end{cases} \tag{7}$$

Wir bilden jetzt das Produkt

$$\left[d\mathfrak{r}_2' d\mathfrak{r}_3'\right] = d\mathfrak{f}' \tag{8}$$

welches nichts anderes ist, als ein gerichtetes Flächenelement für den gestrichenen Beobachter.

Aus (7) erhalten wir

(9) $$d\mathfrak{f}' = d\mathfrak{f} - \frac{pqn}{A}\left[\mathfrak{v}\left[\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f}\right]\right] + \frac{p-1}{A}\left[\mathfrak{c}_0\left[\mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f}\right]\right]$$

oder unter Berücksichtigung der Bedeutung von A aus (18) Nr. 6

(10) $$\frac{d\mathfrak{f}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\left\{d\mathfrak{f} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f} - pqn\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{v} d\mathfrak{f}\right\}$$

wobei augenscheinlich $d\mathfrak{f}$ bzw. $d\mathfrak{f}$ die von K' bzw. K synchron gemessenen Flächenelemente bedeuten.

Aus (10) und (7) ergibt sich weiter für das Produkt

$$d\mathfrak{r}'_1\left[d\mathfrak{r}'_2 d\mathfrak{r}'_3\right] = d\mathfrak{r}'_1 d\mathfrak{f}'$$

(11) $$d\mathfrak{r}'_1 d\mathfrak{f}' = \frac{d\mathfrak{r} d\mathfrak{f}}{A}$$

oder

(11a) $$\frac{d\mathfrak{r}'_1 d\mathfrak{f}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{d\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{f}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

Nun sind $d\mathfrak{r}'_1 d\mathfrak{f}'$ bzw. $d\mathfrak{r} d\mathfrak{f}$ nichts anderes als die entsprechenden Volumenelemente dv' bzw. dv, synchron gemessen von K' bzw. K aus. Aus (113) folgt demnach

(12) $$\frac{dv'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = dJ$$

und wir ersehen hieraus, daß dJ bei dem Übergang von K' zu K eine Invariante ist.

Multiplizieren wir (12) mit (26) Nr. 6, so erhalten wir

(13) $$dJd\mathfrak{r} = dv'dt' = dvdt$$

Woraus folgt, daß auch $dvdt$ eine Invariante ist, denn dies gilt ja für dJ und $d\mathfrak{r}$.

9. Vektoranalytische Transformationen. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Beziehungen zwischen den vektoranalytischen Transformationen im System K' und denjenigen im System K bestehen.

Die vektoranalytischen Transformationen beruhen in der Hauptsache auf der Anwendung des Zeichens Nabla = ∇, was eine Abkürzung für eine gewisse Oberflächenintegration darstellt.[11]

Wir werden an der Operation div den Übergang von dem einen System zum anderen ausführlicher erklären, woraus sich dann leicht der Übergang bei den anderen Operationen ableiten läßt.

Es sei im gestrichenen System ein Vektor $\mathfrak{A}'$ gegeben, für welchen der gestrichene Beobachter die Operation div' bestimmt.

Es ist dann für diesen Beobachter (siehe (45) I)

(1) $$\mathrm{div}'\mathfrak{A}' = \frac{\int \mathfrak{A}' d\mathfrak{f}'}{V'}_{\lim V'=0}$$

Wir müssen jetzt die rechte Seite von (1) so umformen, durch Einführung von ungestrichenen Größen, daß der ungestrichene

Beobachter denselben Zahlenwert von $\mathbf{div}'\mathfrak{A}'$ berechnen kann wie der gestrichene.

Zu dem Zweck denken wir uns zuerst in $\mathfrak{A}'$ statt x', y', z', t' ihre Werte mit Hilfe von (19) Nr. 5 durch x, y, z, t ausgedrückt. Was müssen wir nun weiter für $d\mathfrak{f}'$ und V' einsetzen?

Bei der Ausrechnung der rechten Seite von (1) bezieht der gestrichene Beobachter $d\mathfrak{f}'$ und V' auf den Raum, der zu ihm *ruht*, zugleich mißt er aber auch $d\mathfrak{f}'$ und V' *synchron*. Nun wird der ungestrichene Beobachter bei der Ausrechnung der vektoranalytischen Transformationen mit $d\mathfrak{f}$ und V (oder dv) operieren, die sich auf einen Raum beziehen, der zu ihm ruht, und außerdem werden die Größen von ihm aus synchron gemessen. Wir müssen demnach $d\mathfrak{f}'$ und V' durch solche Größen $d\mathfrak{f}$ und V ersetzen, welche zu dem System K ruhen und im Moment t, welcher dem Moment t' entspricht (d. h. demjenigen Moment, bei welchem der gestrichene Beobachter sein Integral berechnet), für den gestrichenen Beobachter mit $d\mathfrak{f}'$ und V' nach Größe und Richtung zusammenfallen.

D. h. aber, wir müssen in (10) und (12) **Nr. 8** $\mathfrak{v} = 0$ setzen, und erhalten dann, da nun $\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = p$ ist,

(2) $$d\mathfrak{f}' = \frac{d\mathfrak{f}}{p} + \frac{(p-1)}{p}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f}$$

(3) $$dV' = \frac{dV}{p}$$

Und diese Werte müssen wir statt $d\mathfrak{f}'$ und V' in (1) einsetzen.

Es folgt deshalb aus (1)

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{div}'\mathfrak{A}' &= \frac{\int \mathfrak{A}' d\mathfrak{f}'}{\underset{\lim V'=0}{V'}} = \frac{\int' \mathfrak{A}' \left\{d\mathfrak{f} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f}\right\}}{\underset{\lim V=0}{V}} \\ &= \operatorname{div}\left\{\mathfrak{A}' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{A}'\right\} \end{aligned}\right.$$

Obwohl sich div in (4) auf einen zum System K ruhenden Raum bezieht, so ist dennoch der Ausdruck (4) noch nicht vollständig. Denn, wie oben bemerkt, berechnet der gestrichene Beobachter die rechte Seite von (1) in einem bestimmten Moment t', also bei *konstanter* Zeit t'.

Der ungestrichene Beobachter berechnet aber seine vektoranalytischen Transformationen auch bei konstanter Zeit t. Nun ist aber die rechte Seite von (4) bei konstantem t' berechnet. Wir müssen sie deshalb für ein konstantes t umformen. Dies geschieht folgendermaßen. Aus (19) $Nr.5$ folgt für konstantes t'

$$(5)\qquad \frac{dt}{dx} = qn$$

oder in Vektorform geschrieben

$$(5a)\qquad qn = \mathfrak{c}_0 \nabla t$$

Nun fällt der Gradient von t (bei konstantem t') in die Richtung von $\mathfrak{c}_0$, was auch aus (27) $Nr.6$ folgt. Es ist deshalb

$$(6)\qquad \nabla t = \mathfrak{c}_0 \cdot qn;\ t' = \text{konst.}$$

Wir ersehen hieraus, daß im Ausdruck unter $\mathbf{div}$ in (4), t als Parameter betrachtet werden muß, in welchem implizite noch x enthalten ist.

Bezeichnen wir den Ausdruck unter $\mathbf{div}$ in (4) durch $\mathfrak{B}$, so müssen wir in (4) statt $\mathbf{div}\mathfrak{B}$, infolge (134) I, schreiben

$$\text{(7)} \qquad \mathbf{div}\mathfrak{B} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\nabla t = \mathbf{div}\mathfrak{B} + \frac{\partial \mathfrak{B}\mathfrak{c}_0}{\partial t} \cdot qn$$

und erhalten dann endgültig

$$\text{(8)} \qquad \mathbf{div}'\mathfrak{A}' = \mathbf{div}\left\{\mathfrak{A}' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{A}'\right\} + pqn\frac{\partial \mathfrak{A}'\mathfrak{c}_0}{\partial t}$$

wo nun $\mathbf{div}$ bei konstantem t zu nehmen ist.

Ganz analog erhalten wir auf Grund von (44)I und (136) I für einen Skalar a'

$$\text{(9)} \qquad \nabla' a' = \nabla a' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \nabla a' + pqn\mathfrak{c}_0\frac{\partial a'}{\partial t}$$

Aus (68) I folgt, da $\mathfrak{c}_0 = \mathbf{konst.}$ ist,

$$\text{(10)} \qquad \nabla\left(\mathfrak{c}_0\mathfrak{B}\right) = \left(\mathfrak{c}_0\nabla\right)\mathfrak{B} + \left[\mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\mathfrak{B}\right]$$

und aus (63) I

$$\text{(11)} \qquad \mathbf{rot}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right] = \left(\mathfrak{c}_0\nabla\right)\mathfrak{B} - \mathfrak{c}_0\mathbf{div}\mathfrak{B}$$

oder

$$\text{(11a)} \qquad \left(\mathfrak{c}_0\nabla\right)\mathfrak{B} = \mathbf{rot}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right] + \mathfrak{c}_0\mathbf{div}\mathfrak{B}$$

Hieraus und aus (10) ergibt sich

(12) $$\nabla\left(\mathfrak{c}_0\mathfrak{B}\right) = \mathbf{rot}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right] + \left[\mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\mathfrak{B}\right] + \mathfrak{c}_0\mathbf{div}\mathfrak{B}$$

Daraus folgt

(13) $$\mathfrak{c}_0\nabla\left(\mathfrak{c}_0\mathfrak{B}\right) = \mathbf{div}\left(\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{B}\right) = \mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right] + \mathbf{div}\mathfrak{B}$$

oder

(13a) $$\mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right] = \mathbf{div}\left(\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{B}\right) - \mathbf{div}\mathfrak{B}$$

Weiter ergibt (65) I

(14) $$\mathbf{div}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right] = \mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\mathfrak{B}$$

und (69) I und (12)

(15) $$\begin{gathered}\mathbf{rot}\left(\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{B}\right) = -\left[\mathfrak{c}_0\nabla\left(\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right)\right] = -\left[\mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right]\right] - \\ -\left[\mathfrak{c}_0\left[\mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\mathfrak{B}\right]\right] = -\left[\mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right]\right] - \mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\mathfrak{B} + \mathbf{rot}\mathfrak{B}\end{gathered}$$

oder unter Berücksichtigung von (14)

(16) $$\left[\mathfrak{c}_0\mathbf{rot}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right]\right] = \mathbf{rot}\left(\mathfrak{B} - \mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{B}\right) - \mathfrak{c}_0\mathbf{div}\left[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0\right]$$

Auf Grund von (2), (3) und (46) I erhalten wir

(17)

$$\mathrm{rot}'\mathfrak{A}' = \frac{\int \left[d\mathfrak{f}'\mathfrak{A}'\right]}{\underset{\lim V'=0}{V'}} = \frac{\int \left[d\mathfrak{f}\mathfrak{A}'\right]}{\underset{\lim V=0}{V}} + (p-1)\frac{\int \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f}\cdot\left[\mathfrak{c}_0\mathfrak{A}'\right]}{\underset{\lim V=0}{V}}$$

$$= \mathrm{rot}\mathfrak{A}' + (p-1)\left[\mathfrak{c}_0\frac{\int \mathfrak{c}_0 d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{A}'}{\underset{\lim V=0}{V}}\right]$$

oder wegen (57) I und (11a)

$$\mathrm{rot}'\mathfrak{A}' = \mathrm{rot}\mathfrak{A}' + (p-1)\left[\mathfrak{c}_0\mathrm{rot}\left[\mathfrak{A}'\mathfrak{c}_0\right]\right]$$

und wegen (16)

$$\mathrm{rot}'\mathfrak{A}' = \mathrm{rot}\left\{p\mathfrak{A}' - (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{A}'\right\} - (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathrm{div}\left[\mathfrak{A}'\mathfrak{c}_0\right]$$

Oder endlich, unter Berücksichtigung, daß $t' = \mathbf{konst.}$ ist, und wegen (134) I und (135) I

(18) $$\mathrm{rot}'\mathfrak{A}' = \mathrm{rot}\left\{p\mathfrak{A}' - (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{A}'\right\} - (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathrm{div}\left[\mathfrak{A}'\mathfrak{c}_0\right] - pqn\frac{\partial\left[\mathfrak{A}'\mathfrak{c}_0\right]}{\partial t}$$

Weiter folgt aus (20) $Nr.5$ bei $x' = \mathbf{konst.}$

(19) $$\frac{\partial a'}{\partial t'} = \frac{\partial a}{\partial t'}\frac{dt}{dt'} + \frac{\partial a'}{\partial x}\frac{dx}{dt'} = \frac{\partial a}{\partial t'}p + pq\mathfrak{c}_0\nabla a'$$

und analog

(20) $$\frac{\partial\mathfrak{A}'}{\partial t'} = \frac{\partial\mathfrak{A}'}{\partial t}p + pq\left(\mathfrak{c}_0\nabla\right)\mathfrak{A}'$$

oder wegen (11a)

(21) $$\frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t'} = \frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t} p + pq \operatorname{rot}\left[\mathfrak{A}' \mathfrak{c}_0\right] + pq\mathfrak{c}_0 \cdot \operatorname{div}\mathfrak{A}'$$

10. Vektoren erster und zweiter Art. Wir kehren zu dem Ausdruck (3) $Nr.6$ zurück und ersetzen dort $\mathfrak{r}', \mathfrak{r}$ und t allgemein durch $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}$ und b; wir erhalten dann

(1) $$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{A} - pqb\mathfrak{c}_0$$

Einen solchen Vektor, der sich nach dem Schema (1) transformiert, nennen wir, nach *Minkowski*[12], einen Vektor erster Art. Abkürzungsweise und um zugleich die unbekannte Größe b, die bei der Transformation vom System K zu dem System K' auftritt, hervorzuheben, werden wir einen solchen Vektor durch $(\mathfrak{A}, b)$ bezeichnen, wobei das Schema (1) immer im Auge zu behalten ist.

Analog (1) erhalten wir

(2) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{A}' + pqb'\mathfrak{c}_0$$

Hieraus folgen leicht die Beziehungen

$$\mathfrak{c}_0\mathfrak{A}' = p\mathfrak{A}\mathfrak{c}_0 - pqb$$

(3) $$\mathfrak{A}' - \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{A}$$

(4) $$b = pb' + pqn\mathfrak{A}'\mathfrak{c}_0$$

(5) $$b' = pb - pqn\mathfrak{A}\mathfrak{c}_0$$

(6) $$\mathfrak{A}'^2 - \frac{b'^2}{n} = \mathfrak{A}^2 - \frac{b^2}{n} = F$$

(7)

$$\mathfrak{A}' + \frac{(p-1)}{pqn} b' \mathfrak{c}_0 = \mathfrak{A} - \frac{(p-1)}{pqn} b \mathfrak{c}_0$$

Aus (6) ist ersichtlich, daß F eine Invariante ist. Weiter ergibt sich für zwei Vektoren erster Art $(\mathfrak{A}_1, b_1)$ und $(\mathfrak{A}_2, b_2)$

(8) $$\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2' - \frac{b_1' b_2'}{n} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 - \frac{b_1 b_2}{n}$$

und endlich auf Grund der vorigen Nr.

(9) $$\mathrm{div}' \mathfrak{A}' + \frac{\partial b'}{\partial t'} = \mathrm{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial b}{\partial t} = G$$

Also auch G ist eine Invariante.

Aus (16) $Nr.4$ und (18) $Nr.6$ erhalten wir

(10) $$\frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} \{\mathfrak{v} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} - pq\mathfrak{c}_0\}$$

d. h. es ist $\left(\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\right)$ ein Vektor erster Art. Somit ergibt sich aus (9)

(11) $$\mathrm{div}' \frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2}} + \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}}{\partial t'} = \mathrm{div} \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} + \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{\partial t}$$

Es seien gegeben zwei Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$, die sich folgendermaßen transformieren

(12)

$$\begin{cases} \mathfrak{H}' = p\mathfrak{H} - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{H} + pqn\,[\mathfrak{E}\mathfrak{c}_0] \\ \mathfrak{E}' = p\mathfrak{E} - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{E} - pq\,[\mathfrak{H}\mathfrak{c}_0] \end{cases}$$

und entsprechend

$$\begin{cases} \mathfrak{H} = p\mathfrak{H}' - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{H}' - pqn\,[\mathfrak{E}'\mathfrak{c}_0] \\ \mathfrak{E} = p\mathfrak{E}' - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{E}' + pq\,[\mathfrak{H}'\mathfrak{c}_0] \end{cases} \tag{13}$$

Diesen Komplex von zwei Vektoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ nennen wir, nach *Minkowski*, einen Vektor *zweiter* Art, bezeichnen ihn durch $(\mathfrak{H}, \mathfrak{E})$ und berücksichtigen dabei wieder das Schema (12).

Aus (12) und (13) folgt

$$\mathfrak{E}\mathfrak{H} = \mathfrak{E}'\mathfrak{H}' = R \tag{14}$$

$$\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2 = \mathfrak{E}'^2 - \mathfrak{H}'^2 = S \tag{15}$$

wo R und S demnach Invarianten sind, und

$$\begin{cases} \mathfrak{E}\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{E}'\mathfrak{c}_0 \\ \mathfrak{H}\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{H}'\mathfrak{c}_0 \end{cases} \tag{16}$$

Auf Grund von $Nr.9$ erhalten wir weiter

$$\mathrm{rot}'\mathfrak{E}' + \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial t'} - \frac{p-1}{pqn}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}'\mathfrak{H}' = \mathrm{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t'} + \frac{p-1}{pqn}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}\mathfrak{H} \tag{17}$$

und

$$\mathrm{rot}'\mathfrak{H}' - n\frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial t'} + \frac{p-1}{pq}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}'\mathfrak{E}' = \mathrm{rot}\mathfrak{H} - n\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t'} - \frac{p-1}{pq}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}\mathfrak{E} \tag{18}$$

Aus (12) und (10) folgt weiter

$$\text{(19)} \qquad \frac{\mathfrak{v}'\mathfrak{H}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{p}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\left\{\mathfrak{H}\mathfrak{v} - q\mathfrak{H}\mathfrak{c}_0 + qn\mathfrak{v}\left[\mathfrak{E}\mathfrak{c}_0\right]\right\}$$

und

$$\text{(20)} \qquad \frac{\mathfrak{v}'\mathfrak{E}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{p}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\left\{\mathfrak{E}\mathfrak{v} - q\mathfrak{E}\mathfrak{c}_0 - q\mathfrak{v}\left[\mathfrak{H}\mathfrak{c}_0\right]\right\}$$

11. Dichte. Massenänderung. Kontinuitätsgleichung. Wir verfolgen jetzt die Bewegung eines Mediums, greifen ein Volumenelement desselben heraus und transformieren es auf Ruhe (System K', $\mathfrak{v}' = 0$) im Moment t. Im selben Moment mißt der Beobachter auf K' die Masse m_0, Dichte ϱ_0 und die Änderung D_0 der Masse pro Volumen- und Zeiteinheit. Es ist also

$$\text{(1)} \qquad D_0 = \frac{dm_0}{dv'\,dt'} = \frac{d\varrho_0\,dv'}{dv'\,dt'}$$

Man bezeichnet m_0 als Ruhemasse, ϱ_0 als Ruhedichte und D_0 kann entsprechend als Ruhemassenänderung bezeichnet werden.

Da nun m_0 und ϱ_0 gewisse Zahlenwerte bedeuten, so folgt wegen (13) und (12) **Nr. 8**, da hier $\mathfrak{v}' = 0$ und infolgedessen

$$dv' = \frac{dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

ist, aus (1)

(1a) $$D_0 = \frac{d\frac{\varrho_0 dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dvdt} = \frac{dm_0}{dvdt}$$

D. h. D_0 ist eine Invariante, falls wir die Ruhemasse m_0 resp. Ruhedichte ϱ_0 im Auge behalten.

Gesetzt wir bestimmen die Dichte ϱ_1 und die Massenänderung D pro Volumen- und Zeiteinheit vom ruhenden System aus. Dann ist

(2) $$D = \frac{d\varrho_1 dv}{dvdt}$$

Ein Vergleich von (2) und (1a) führt uns dazu,

(3) $$\varrho = \frac{\varrho_0}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

auch als eine Dichte aufzufassen, die aber nicht gleich ϱ_1 zu sein braucht, sondern sich aus der Ruhedichte berechnet. Aus (3) ergibt sich augenscheinlich

(4) $$\varrho\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2} = \varrho'\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2} = \varrho_0$$

Angenommen es sei

(5) $$D = D'$$

d. h. die Massenänderung ist eine für alle Systeme gleiche Größe. Dann ist auch $D = D_0$ und es folgt aus (1a), (2) und (3)

(6)

$$\begin{cases} \varrho_1 = \varrho = \dfrac{\varrho_0}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} \\ \varrho_1 \sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2} = \varrho_1' \sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2} = \varrho_0 \\ m = m' = m_0 . \end{cases}$$

Ist im speziellen Fall $D = D' = D_0 = 0$, d. h. ist die Kontinuitätsgleichung für alle Systeme erfüllt, so gelten auch hierbei die Beziehungen (6).

Bei Innehaltung von (5) ist es leicht, die Beziehung zwischen D_0 und der Invariante G der vorigen Nr. nachzuweisen. Aus (10) $Nr.10$ und (4) folgt, daß $(\varrho\mathfrak{v}, \varrho)$ ein Vektor erster Art ist. Hieraus und aus (9) **Nr. 10** ergibt sich

(7) $$G = \mathrm{div}\varrho\mathfrak{v} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

oder wegen (3) II **Nr. 22**

(8) $$G = \mathrm{div}\varrho\mathfrak{v} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} - \mathfrak{v}\nabla\varrho = \varrho\mathrm{div}\mathfrak{v} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

Anderseits folgt aus (2), (4) und (a) II **Nr. 23**

(9) $$D = D_0 = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho\mathrm{div}\mathfrak{v}$$

woraus $D_0 = G$ folgt.

12. Die Lorentzschen elektrodynamischen Gleichungen. Die Lorentzschen elektrodynamischen Gleichungen lauten, falls $\mathfrak{E}$ die

elektrische, $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft und ϱ die Dichte der Elektrizität bedeuten, da $n = \frac{1}{\varrho^2}$, (alle Größen im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ausgedrückt),

$$(1) \qquad 4\pi\varrho\mathfrak{v} + n\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathfrak{H}$$

$$(2) \qquad -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathfrak{E}$$

$$(3) \qquad \varrho = \frac{n}{4\pi}\mathrm{div}\mathfrak{E}$$

$$(4) \qquad \mathrm{div}\mathfrak{H} = 0$$

Für die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität erhalten wir aus (1)

$$(5) \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\varrho\mathfrak{v} = 0$$

Das Relativitätsprinzip fordert, daß für das gestrichene System die Form obiger Gleichungen erhalten bleibt und daß auch (5) erfüllt wird. Es ist demnach $D = D' = D_0 = 0$. Aus den Erörterungen der vorigen Nr. und aus (7) **Nr. 10** und (3) folgt dann

$$(6) \quad 4\pi\varrho'\mathfrak{v}' + \frac{(p-1)}{pq}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}'\mathfrak{E}' = 4\pi\varrho\mathfrak{v} - \frac{(p-1)}{pq}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}\mathfrak{E}$$

und außerdem ist

$$(7) \qquad \varrho\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2} = \varrho'\sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2}$$

Nehmen wir nun an, $(\mathfrak{H}, \mathfrak{E})$ sei ein Vektor zweiter Art, und setzen (6) in (18) **Nr. 10** ein, so erhalten wir aus letzterer Gleichung und

aus (17) **Nr. 10**, bei Berücksichtigung von (4)

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{rot}'\mathfrak{H}' - n\frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial t'} - 4\pi\varrho'\mathfrak{v}' = \mathrm{rot}\mathfrak{H} - n\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} - 4\pi\varrho\mathfrak{v}$$

und

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{rot}'\mathfrak{E}' + \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial t'} = \mathrm{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$$

Demnach führt die Annahme, daß $(\mathfrak{H}, \mathfrak{E})$ ein Vektor zweiter Art ist, zu den Gleichungen (8) und (9), welche uns zeigen, daß durch diese Annahme dem Relativitätsprinzip genügt ist. Bei der Ableitung von (9) aus (17) **Nr. 10** ist $\mathrm{div}'\mathfrak{H}' = 0$ gesetzt worden. Dies kann man mit Hilfe von Nr. 9 und den *Lorentz*schen Gleichungen nachweisen.

Bezeichnet e die Ladung eines Volumenelementes dv, so folgt aus (12) **Nr. 8** und aus (7)

$$\text{(10)} \qquad e = \varrho dv = \varrho' d' v' = e'$$

Die auf die Ladung e wirkende ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$ ist nach *Lorentz*

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{K} = e\mathfrak{E} + [e\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$$

und entsprechend für den gestrichenen Beobachter

$$\text{(12)} \qquad \mathfrak{K}' = e'\mathfrak{E}' + [e'\mathfrak{v}'\mathfrak{H}']$$

Es ist nun leicht nachzuweisen, daß

(13) $$\frac{\mathfrak{K}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\{\mathfrak{K} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{K} - pqn\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{K}\mathfrak{v}\}$$

d. h. $\left(\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}, \frac{n\mathfrak{K}\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\right)$ ein Vektor erster Art ist.

Nämlich die Kraft $\mathfrak{K}_1$ auf die Volumeneinheit ist gleich

(14) $$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{E}\varrho + [\varrho\mathfrak{v}\mathfrak{H}]$$

und entsprechend

(15) $$\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{E}'\varrho + [\varrho'\mathfrak{v}'\mathfrak{H}']$$

Da nun $\mathfrak{K}_1 dv = \mathfrak{K}$ ist, so ergibt (13) wegen (12) **Nr. 8**

(16) $$\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{K}_1 + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{K}_1 - pqn\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{K}_1\mathfrak{v}$$

Also ist $(\mathfrak{K}_1, n\mathfrak{K}_1\mathfrak{v})$ ein Vektor erster Art.

13. Die Minkowskischen Grundgleichungen für bewegte Körper.[13] Die Grundgleichungen für ruhende isotrope Körper lauten:

$$(1) \qquad 4\pi\mathfrak{J} + 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathfrak{H}$$

$$(2) \qquad -\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathfrak{E}$$

$$(3) \qquad \varrho = \mathrm{div}\mathfrak{D}$$

$$(4) \qquad \mathrm{div}\mathfrak{B} = 0.$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\text{div}\mathfrak{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

Hier bedeuten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die elektrische bzw. die magnetische Kraft.

$$\mathfrak{D} = \frac{\epsilon \mathfrak{E}}{4\pi c^2} = \frac{\epsilon n \mathfrak{E}}{4\pi} \tag{6}$$

ist die elektrische Erregung, resp. Verschiebung und

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \tag{7}$$

die magnetische Erregung, resp. Induktion. ϱ ist die Dichte der wahren Elektrizität und

$$\mathfrak{J} = \sigma \mathfrak{E} \tag{8}$$

der Leitungsstrom, σ die Leitfähigkeit. Alle Größen sind im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ausgedrückt.

Wir gehen jetzt zu bewegten Körpern über. Es bezeichne wie früher $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit eines Punktes der bewegten Materie, vom System K aus gemessen, und desgleichen $\mathfrak{v}'$ für das System K'.

Nun nimmt *Minkowski* an:

I. Wenn wir einen Punkt der bewegten Materie in einem Moment t auf Ruhe transformieren $(\mathfrak{v}' = 0)$, so behalten für den gestrichenen Beobachter auf K' im selben Moment für diesen Punkt die Grundgleichungen (1)—(8) ihre Gültigkeit.

Weiter nimmt *Minkowski* an:

II. $\left(\mathfrak{H}, \frac{4\pi}{n} D\right)$ und $(\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$ sind Vektoren zweiter Art und $(\mathfrak{J}, \varrho)$ ein Vektor erster Art. Aus II. folgt dann, wegen (18) und (17) **Nr. 10**

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{rot}'\mathfrak{H}' - 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial t'} + \frac{(p-1)}{pqn}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}'\mathfrak{D}' = \\ &= \mathrm{rot}\mathfrak{H} - 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} - \frac{(p-1)}{pqn}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}\mathfrak{D} \end{aligned}$$

und

$$\text{(10)} \qquad \begin{aligned} &\mathrm{rot}'\mathfrak{E}' + \frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t'} - \frac{(p-1)}{pqn}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}'\mathfrak{B}' = \\ &= \mathrm{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \frac{p-1}{pqn}\mathfrak{c}_0 \cdot \mathrm{div}\mathfrak{B} \end{aligned}$$

und

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{J} - pq\mathfrak{c}_0\varrho$$

Woraus sich wegen (7) **Nr. 10** ergibt

$$\text{(12)} \qquad \mathfrak{J}' + \frac{p-1}{pqn}\varrho'\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{J} - \frac{p-1}{pqn}\mathfrak{c}_0 \cdot \varrho$$

Da nun allgemein

$$(13) \qquad \begin{cases} \varrho' = \operatorname{div}' \mathfrak{D}' \\ \varrho = \operatorname{div} \mathfrak{D} \end{cases}$$

ist, so folgt aus (9) wegen (12)

$$(14) \qquad \operatorname{rot}' \mathfrak{H}' - 4\pi \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial t'} - 4\pi \mathfrak{J}' = \operatorname{rot} \mathfrak{H} - 4\pi \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - 4\pi \mathfrak{J}$$

Aus II. haben wir ganz allgemein

$$(15) \qquad \begin{cases} \mathfrak{H}' = p\mathfrak{H} - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{H} + 4\pi pq\,[\mathfrak{D}\mathfrak{c}_0] \\ \dfrac{4\pi \mathfrak{D}'}{n} = \dfrac{4\pi p \mathfrak{D}}{n} - \dfrac{4\pi}{n}(p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{D} - pq\,[\mathfrak{H}\mathfrak{c}_0] \end{cases}$$

und

$$(16) \qquad \begin{cases} \mathfrak{B}' = p\mathfrak{B} - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{B} + pqn\,[\mathfrak{E}\mathfrak{c}_0] \\ \mathfrak{E}' = p\mathfrak{E} - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{E} - pq\,[\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0] \end{cases}$$

Ersetzen wir in (8) **Nr. 9** die gestrichenen Größen durch die ungestrichenen und q durch $-q$, so folgt hieraus und aus (16) unter Berücksichtigung von (14) **Nr. 9**

$$(17) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = p \operatorname{div}' \mathfrak{B}' - pgn\mathfrak{c}_0 \operatorname{rot}' \mathfrak{E}' - pqn \frac{\partial \mathfrak{B}' \mathfrak{c}_0}{\partial t'}$$

Transformieren wir jetzt auf Ruhe, so verschwindet infolge I. die rechte Seite von (17), und es folgt

$$(18) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

Zugleich verschwinden aber auch die linken Seiten von (10) und (14), und wir erhalten dann unter Berücksichtigung von (18)

$$4\pi\mathfrak{J} + 4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathfrak{H} \tag{19}$$

$$-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathfrak{E} \tag{20}$$

Diese Gleichungen (18)—(20) zusammen mit (13) gelten für eine beliebige Geschwindigkeit der Materie. Wir ersehen, daß sie dieselbe Form haben, wie für ruhende Körper. Weiter folgt aus (17)

$$\mathrm{div}'\mathfrak{B}' = p\,\mathrm{div}\mathfrak{B} - pgn\mathfrak{c}_0\mathrm{rot}\mathfrak{E} + pqn\frac{\partial\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0}{\partial t} \tag{21}$$

oder wegen (18) und (20)

$$\mathrm{div}'\mathfrak{B}' = 0 \tag{22}$$

Hieraus und aus (18) erhalten wir statt (10)

$$\mathrm{rot}'\mathfrak{E}' + \frac{\partial\mathfrak{B}'}{\partial t'} = \mathrm{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} \tag{23}$$

Aus (23) und (14) ersehen Wir, daß die Gleichungen (18)—(20) nicht nur dieselbe Form wie bei ruhenden Körpern haben, sondern, daß sie auch ihre Form behalten bei dem Übergang von einem System zum anderen. D. h. die eben aufgestellten Gleichungen für bewegte Körper genügen, infolge der Annahme II dem Relativitätsprinzip.

Es bleibt uns nur noch übrig, die Beziehungen zwischen $\mathfrak{J}, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ für bewegte Körper aufzustellen.

Auf Grund von I folgt augenscheinlich

(24) $$\mathfrak{J}' = \sigma\mathfrak{E}'; \ \mathfrak{B}' = \sigma\mathfrak{H}'; \ 4\pi\mathfrak{D}' = n\epsilon\mathfrak{E}'$$

Hieraus und aus (15) und (16) erhalten wir, unter Berücksichtigung, daß bei der Transformation auf Ruhe $\mathfrak{v}' = 0$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{c}_0 q, p = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$ ist,

(25) $$\mathfrak{J} = \mathfrak{v}\varrho + \frac{\sigma}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\{\mathfrak{E} - n\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}\mathfrak{E} - [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\}$$

(26) $$\mathfrak{B} + n[\mathfrak{E}\mathfrak{v}] = \mu\{\mathfrak{H} + 4\pi[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]\}$$

(27) $$\frac{4\pi\mathfrak{D}}{n} - [\mathfrak{H}\mathfrak{v}] = \epsilon\{\mathfrak{E} - [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]\}$$

oder

(26a) $$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}_1 - n[\mathfrak{E}\mathfrak{v}]$$

(27a) $$\frac{4\pi\mathfrak{D}}{n} = \epsilon\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{H}\mathfrak{v}]$$

wo

(28) $$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} - [\mathfrak{B}\mathfrak{v}]$$

(29) $$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} + 4\pi[\mathfrak{D}\mathfrak{v}]$$

bedeuten. Verstehen wir unter $\mathfrak{J}_1$ den Leitungsstrom, so ist

(30) $$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J} - \mathfrak{v}\varrho$$

Aus (5) **Nr. 10** und (11) ergibt sich

(31) $$\varrho' = p\varrho - pqn\mathfrak{J}\mathfrak{c}_0$$

oder

(32) $$\varrho' = A\varrho - pqn\mathfrak{J}_1\mathfrak{c}_0$$

oder endlich

(33) $$\varrho'\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2} = \varrho\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2} - \frac{pqn\mathfrak{J}_1\mathfrak{c}_0\cdot\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}{A}$$

Vergleichen Wir dies mit den Ausführungen der vorigen Nr., so sehen wir, daß wir hier eigentlich ϱ_1 statt ϱ geschrieben haben müßten. Für die Ruhedichte ϱ_0 erhalten wir aus (33) $(\mathfrak{v}' = 0)$

(34) $$\varrho_0 = \varrho\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2} - \frac{\mathfrak{J}_1\mathfrak{v}\cdot n}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

und für die Ruhemasse e_0

(35) $$e_0 = e - \frac{\mathfrak{J}_1\mathfrak{v}\cdot ndv}{1-n\mathfrak{v}^2}$$

Weiter folgt aus (32)

(36) $$\frac{e'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{Ae - pqn\mathfrak{J}_1\mathfrak{c}_0\cdot dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

Berechnen wir jetzt $\mathfrak{v}'\varrho'$ mit Hilfe von (32), so ergibt uns (30) und (11)

(37) $$\mathfrak{J}_1' = \mathfrak{J}_1 - \frac{(p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{J}_1}{A} + \frac{pqn\mathfrak{J}_1 \mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{v}}{A}$$

oder

(38) $$\frac{\mathfrak{J}_1'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} \{p\mathfrak{J}_1 - (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{J}_1 - pqn\,[\mathfrak{c}_0\,[\mathfrak{J}_1 \mathfrak{v}]]\}$$

Für den Ruheleitungsstrom $(\mathfrak{v}' = 0)$ erhalten wir dann aus (37), (16) und (25)

(39) $$\mathfrak{J}_1' = \sigma \mathfrak{E}' \quad (\mathfrak{v}' = 0)$$

in Übereinstimmung mit (8) und der Annahme I.

Wir haben weiter

(40) $$\frac{\mathfrak{E}_1'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{\mathfrak{E}' - [\mathfrak{B}'\mathfrak{v}']}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} \{\mathfrak{E} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{E} \\ -(p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 [\mathfrak{B}\mathfrak{v}] - [\mathfrak{B}\mathfrak{v}] - pqn\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{E}\mathfrak{v}\}$$

Hieraus und aus (37) erhalten wir

(41) $$\frac{\mathfrak{E}_1' \mathfrak{J}_1'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{\mathfrak{E}_1 \mathfrak{J}_1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = W$$

wo W eine Invariante ist. Dies Resultat ist für das Folgende überaus wichtig. Die Bedeutung von W ergibt sich aus folgender Überlegung.

Transformieren wir auf Ruhe, so erhalten wir aus (41) auf Grund von (39)

$$W = \sigma \mathfrak{E}'^2 \tag{42}$$

d. h. nichts anderes als die pro Zeit- und Volumeneinheit entwickelte Joulesche Wärme für ein ruhendes Medium.

Es seien gegeben drei beliebige Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}$. Wir bilden hieraus den Ausdruck

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{M}\mathfrak{A}] - \mathfrak{A}\mathfrak{M} \cdot [\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = \mathfrak{G} \tag{43}$$

Multiplizieren wir nun $\mathfrak{G}$ mit einem Vektor $\mathfrak{n}$, so folgt aus (43)

$$\mathfrak{G}\mathfrak{n} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{t} - \mathfrak{A}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{t} = \mathfrak{A}[\mathfrak{t}[\mathfrak{B}\mathfrak{M}]] = [\mathfrak{A}\mathfrak{t}][\mathfrak{A}\mathfrak{M}]$$

wo $\mathfrak{t} = [\mathfrak{A}\mathfrak{n}]$ bedeutet.

Hieraus folgt

$$\mathfrak{G}\mathfrak{n} = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{n} - \mathfrak{n}[\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \cdot \mathfrak{A}^2$$

und da $\mathfrak{n}$ beliebig ist:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{M}\mathfrak{A}] - \mathfrak{A}\mathfrak{M} \cdot [\mathfrak{B}\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \cdot \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2 \cdot [\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \tag{44}$$

Ist im speziellen Fall $\mathfrak{A}$ ein Einheitsvektor z. B. $\mathfrak{c}_0$, so ergibt (44)

$$\mathfrak{c}_0\mathfrak{B} \cdot [\mathfrak{M}\mathfrak{c}_0] - \mathfrak{c}_0\mathfrak{M} \cdot [\mathfrak{B}\mathfrak{c}_0] = \mathfrak{c}_0[\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \cdot \mathfrak{c}_0 - [\mathfrak{B}\mathfrak{M}] \tag{45}$$

Setzen wir

$$\mathfrak{R} = \varrho\mathfrak{E} + [\mathfrak{J}\mathfrak{B}] = \varrho\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}] \tag{46}$$

so läßt sich leicht mit Hilfe der entsprechenden Transformationsgleichung und (45) zeigen, daß

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} + (p-1)\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}_0\mathfrak{R} - pq\mathfrak{c}_0\cdot n\mathfrak{J}\mathfrak{E}$$

d.h.

(47) $$(\mathfrak{R}, n\mathfrak{J}\mathfrak{E}) = \text{Vektor erster Art.}$$

oder da

(48) $$\mathfrak{J}\mathfrak{E} = \mathfrak{v}\mathfrak{R} + \mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1$$

ist,

(49) $$(\mathfrak{R}, n\mathfrak{v}\mathfrak{R} + n\mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1) = \text{Vektor erster Art.}$$

Aus (26) und (27) folgt

(50) $$\begin{cases} \mathfrak{B}\mathfrak{v} = \mu\mathfrak{H}\mathfrak{v} \\ \dfrac{4\pi\mathfrak{D}\mathfrak{v}}{n} = \epsilon\mathfrak{E}\mathfrak{v} \end{cases}$$

Setzen wir nun den Wert von $\mathfrak{B}$ aus (26) in (27), so folgt

(51) $$\frac{4\pi}{n}\left(1-\mu\epsilon n\mathfrak{v}^2\right)\mathfrak{D} = (1-\epsilon\mu)\left\{[\mathfrak{H}\mathfrak{v}] + \epsilon n\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{E}\mathfrak{v}\right\} + \epsilon\mathfrak{E}\cdot\left(1-n\mathfrak{v}^2\right)$$

Analog ergibt sich aus (26) durch Einsetzen des Wertes von $\mathfrak{D}$ aus (27)

(52) $$\left(1-\epsilon\mu n\mathfrak{v}^2\right)\mathfrak{B} = (1-\epsilon\mu)\left\{[\mathfrak{v}\mathfrak{E}] + n\mu\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{H}\mathfrak{v}\right\} + \mu\mathfrak{H}\cdot\left(1-n\mathfrak{v}^2\right)$$

Ist $\epsilon = 1$ und $\mu = 1$, so ergeben uns (51) und (52)

(53) $$\begin{cases} \mathfrak{D} = \dfrac{\mathfrak{E}n}{4\pi} \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{H} \end{cases}$$

14. Die Bewegungsgleichungen eines Massenteilchens. Aus den thermodynamischen Betrachtungen von Herrn *M. Planck*[14] folgt, daß bei isobaren Prozessen die Änderung der Ruhemasse des Massenteilchens gleich nQ ist, wo Q die von außen dem Teilchen zugeführte Wärme bedeutet. Dies gilt für beliebige reversible und irreversible Prozesse. Demnach können wir schreiben, falls wir unter Q'_1 die von außen der Ruhemasse m_0 des Teilchens pro Volumen- und Zeiteinheit zugeführte Wärme verstehen

(1) $$\frac{dm_0}{dv'\,dt'} = nQ'_1$$

Ist T die Temperatur und S die Entropie, so folgt weiter nach *M. Planck*[15]

(2) $$\begin{cases} \dfrac{T}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = \dfrac{T'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} \\ S = S' \end{cases}$$

Da nun nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik $Q = TdS$ ist, so erhalten wir infolgedessen aus (2)

(3) $$\frac{Q}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = \frac{Q'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}$$

oder wegen (13) **Nr. 8**

(4) $$\frac{Q_1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = \frac{Q_1'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}$$

Transformieren wir auf Ruhe $(\mathfrak{v}' = 0)$, so ergibt sich

(5) $$Q_1' = \frac{Q_1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

Und dieser Wert von Q_1' ist derjenige, der für (1) in Betracht kommt, da wir doch bei der Aufstellung von (1) die Ruhemasse betrachtet haben. Infolge $Nr.11$ und (5) können wir schreiben

(6) $$D_0 = \frac{dm_0}{dv'dt'} = Q_1'n = \frac{Q_1 n}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} = \frac{dm_0}{dvdt}$$

woraus sich ergibt

(7) $$\frac{dm_0}{dt} = \frac{nQ_1 dv}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

Bewegt sich das Teilchen adiabatisch, so ist $Q_1 = 0$ und demnach $\frac{dm_0}{dt} = 0$.

Die Energiegleichung des Massenteilchens lautet

(8) $$\frac{dE}{dt} = \mathfrak{v}\mathfrak{K} + Q_1 dv$$

wo E die kinetische Energie des Teilchens bedeutet und $\mathfrak{K}$ die auf dasselbe von außen wirkende Kraft.

Wegen (7) kann man statt (8) auch schreiben

(9) $$\frac{dE}{dt} = \mathfrak{v}\mathfrak{K} + \frac{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}}{n}\frac{dm_0}{dt}$$

Bei adiabatischer Bewegung ist

(10) $$\frac{dE}{dt} = \mathfrak{v}\mathfrak{K}$$

wo augenscheinlich E in (10) und (8) dieselbe Größe sein muß. Diese Bemerkung ist für das Folgende von Wichtigkeit.

Nun kehren wir zu **Nr. 12** zurück. Wir sahen dort, daß die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$ auf die Ladung e wirkt, und daß dabei

(11) $$\left(\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}}, \frac{n\mathfrak{v}\mathfrak{K}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}}\right) = \text{Vektor erster Art}$$

ist. Auch ist e eine von der Zeit unabhängige Größe.

Wir nehmen nun an, ein Massenteilchen sei mit der Ladung e geladen und bewege sich adiabatisch im elektrischen Feld. Dann wird auf das Teilchen dieselbe Kraft $\mathfrak{K}$ wirken.

Wirkt nun auf das adiabatisch bewegte Teilchen eine beliebige ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$, so müssen wir nach dem Obigen annehmen, daß dieses $\mathfrak{K}$ auch der Bedingung (11) genügt.

Nun sagt die Mechanik, daß die Kraft gleich dem Produkte aus Ruhemasse und Beschleunigung ist, d. h.

(12) $$m_0\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{K}$$

Infolge des Relativitätsprinzips muß aber auch gelten

(13) $$m_0 \frac{d\mathfrak{v}'}{dt'} = \mathfrak{K}'$$

Da nun $\mathfrak{K}$ der Bedingung (11) genügen muß, so muß auch, wegen (12) und (13) (da $\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}dt = d\tau$ ist), $\left(\frac{m_0 d\mathfrak{v}}{d\tau}, \frac{m_0 n\mathfrak{v} d\mathfrak{v}}{d\tau}\right)$ ein Vektor erster Art sein. Dies ist aber nicht der Fall, wie man sich leicht überzeugen kann. Folglich ist der Ansatz (12) falsch.

Wir schreiben nun

(14) $$m_0 \frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} = \mathfrak{K}$$

Da

(15) $$\frac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} = \frac{n\mathfrak{v}}{(1 - n\mathfrak{v}^2)^{3/2}} \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = n\mathfrak{v} \cdot \frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt}$$

ist, so folgt aus (10) **Nr. 10**, daß

(16) $$\left(\frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{d\tau}, n\mathfrak{v}\frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{d\tau}\right) = \text{Vektor erster Art}$$

ist. Demnach genügt der Ansatz (14) dem Relativitätsgesetz bei adiabatischer Bewegung.

Aus (14) und (15) folgt weiter

(17) $$\mathfrak{K}\mathfrak{v} = \frac{m_0}{n} \frac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt}$$

und dies ergibt auf Grund von (10) für die kinetische Energie E den Wert

(18)[16] $$E = \frac{m_0}{n\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

wobei wir eine Konstante unterdrücken, die für uns belanglos ist, da wir doch nur die Änderungen von E beobachten.

Wir gehen jetzt zu nicht adiabatischen Bewegungen über. Es ist also $Q_1 \neq 0$ und demnach $\frac{dm_0}{dt} \neq 0$. Die linke Seite der entsprechenden Bewegungsgleichung muß bei dem Übergang zur adiabatischen Bewegung in die linke Seite von (14) übergehen.

Wir werden deshalb überhaupt die linke Seite von (14) als richtig ansehen auch bei nicht adiabatischer Bewegung. Da aber in (14) m_0 ebensogut unter dem Differential stehen kann, so wissen wir nicht, ob wir bei nicht adiabatischer Bewegung

(19) $$m_0 \frac{d\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} = \mathfrak{K}$$

oder

(20) $$\frac{d\frac{m_0\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} = \mathfrak{K}$$

schreiben müssen. Denn beide Gleichungen (19) und (20) gehen in (14) für $m_0 = \mathbf{konst.}$ über.

Wir nehmen erst (19) als richtig an. Wegen (16) wird auch $\mathfrak{K}$ der Bedingung (11) genügen, und auch (17) behält seine Gültigkeit. Anderseits folgt aus der Energiegleichung (9) Wegen (17)

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{m_0}{n} \dfrac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} + \dfrac{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}{n} \dfrac{dm_0}{dt} = \\ \qquad = \dfrac{d\frac{m_0}{n\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} - \dfrac{\mathfrak{v}^2}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} \dfrac{dm_0}{dt}. \end{cases}$$

Hieraus folgt für E ein von (18) verschiedener Ausdruck, was wir nicht annehmen wollen.

Nun untersuchen wir (20). Auf Grund des Relativitätsprinzips muß sein

$$(22) \qquad \frac{d\frac{m_0\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}}{dt'} = \mathfrak{K}'$$

Anderseits haben wir

(23)

$$\frac{d\frac{m_0\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}dt'} = \frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\left\{\frac{d\frac{m_0\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} + (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_0\frac{d\frac{m_0\mathfrak{v}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt}\right.$$
$$\left. -pq\mathfrak{c}_0\cdot\frac{d\frac{m_0}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt}\right\}$$

Hieraus ergibt sich auf Grund von (15), (20) und (22)

$$\frac{\mathfrak{K}'}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} + (p-1)\mathfrak{c}_0\cdot\frac{\mathfrak{c}_0\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$
$$- pq\mathfrak{c}_0\cdot\left\{\frac{n\mathfrak{v}\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} + \frac{dm_0}{dt}\right\}. \tag{24}$$

Also ist

$$\left(\frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}},\ \frac{n\mathfrak{v}\mathfrak{K}}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}} + \frac{dm_0}{dt}\right) = \text{Vektor erster Art} \tag{25}$$

Für adiabatische Bewegung $\left(\frac{dm_0}{dt} = 0\right)$ geht (25) in (11) und (20) in (14) über. Weiter ergibt (20) infolge von (15)

$$\mathfrak{K}\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{v}^2}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\frac{dm_0}{dt} + \frac{m_0}{n}\frac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} \tag{26}$$

Hieraus und aus (9) folgt dann

(27)
$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{n}\frac{d\frac{1}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt} + \frac{\mathfrak{v}^2}{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}\frac{dm_0}{dt}$$
$$+ \frac{\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}{n}\frac{dm_0}{dt} = \frac{d\frac{m_0}{n\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}}{dt}$$

und demnach

(28)
$$E = \frac{m_0}{n\sqrt{1-n\mathfrak{v}^2}}$$

Also derselbe Ausdruck wie (18), Weshalb wir (20) als richtig annehmen Wollen, auch soll die Kraft $\mathfrak{K}$ bei nicht adiabatischer Bewegung der Bedingung (25) genügen.[17]

15. Ponderomotorische Kraft im elektromagnetischen Feld. Wir nehmen jetzt an, die ponderomotorischen Kräfte auf ein Massenteilchen seien elektromagnetischer Natur, und entsprechend sei die in dem Teilchen entwickelte Wärme nur die Joulesche Wärme.

Aus (41) **Nr. 13** und (4) **Nr. 14** folgt

(1)
$$\frac{\mathfrak{J}_1'\mathfrak{E}_1'}{Q_1'} = \frac{\mathfrak{J}_1\mathfrak{E}_1}{Q_1}$$

Da nun laut $Nr.13$ für ein auf Ruhe transformiertes Teilchen die Joulesche Wärme $W = \mathfrak{J}_1'\mathfrak{E}_1'$ ist, so folgt aus (1) allgemein für die pro Volumen- und Zeiteinheit entwickelte Wärme Q_1 der Ausdruck

(2) $$Q_1 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{E}_1$$

in Übereinstimmung mit *M. Abraham*.[17]

Aus (7) **Nr. 14** und (2) ergibt sich

(3) $$\frac{n\mathfrak{J}_1 \mathfrak{E}_1 dv}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} = \frac{dm_0}{dt}$$

Die Kraft $\mathfrak{K}$ auf ein Massenteilchen muß der Bedingung (25) $Nr.14$ genügen, d. h. es muß sein

(4) $$\frac{\mathfrak{K}'}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}'^2}} = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} + \frac{(p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{K}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} - pq\mathfrak{c}_0 \left\{ \frac{n\mathfrak{v}\mathfrak{K}}{\sqrt{1 - n\mathfrak{v}^2}} + \frac{dm_0}{dt} \right\}.$$

oder auf die Volumeneinheit berechnet und unter Berücksichtigung von (3)

(5) $$\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{K}_1 + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{K}_1 - pq\mathfrak{c}_0 \left\{ n\mathfrak{v}\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{E}_1 \right\}$$

wo $\mathfrak{K}_1$ die Kraft auf die Volumeneinheit bedeutet. D. h.

(6) $$(\mathfrak{K}_1, n\mathfrak{v}\mathfrak{K}_1 + n\mathfrak{J}_1 \mathfrak{E}) = \textbf{Vektor erster Art.}$$

Wir kehren jetzt zu **Nr. 13** zurück und setzen

(7) $$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{R} + \mathfrak{R}_1$$

Ein Vergleich von (6) und (49) **Nr. 13** liefert sofort, daß

(8) $$(\mathfrak{R}_1, n\mathfrak{v}\mathfrak{R}_1) = \text{Vektor erster Art.}$$

sein muß. Nun nehmen wir an, es sei überall $\epsilon = 1$ und $\mu = 1$. Dann folgt nach allen Theorien für ein auf Ruhe transformiertes Volumenelement fiir die Kraft $\mathfrak{K}_1'$ der Ausdruck

(9) $$\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{E}'\varrho' + [\mathfrak{J}_1'\mathfrak{B}']$$

wo wegen **Nr. 13** $\mathfrak{J}_1' = \sigma\mathfrak{E}'$ ist.

Aus der Bedeutung von $\mathfrak{R}$,

(10) $$\mathfrak{R} = \varrho\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}]$$

ersehen wir, daß in $\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{R}'$ ist, also $\mathfrak{R}_1' = 0$. Da nun $\mathfrak{R}_1$ der Bedingung genügen muß, so wird also überhaupt $\mathfrak{R}_1 = 0$ sein, und wir erhalten dann aus (7) und (10) für den Fall, daß $\epsilon = 1$ und $\mu = 1$, für die Kraft pro Volumeneinheit den Wert

(11) $$\mathfrak{K}_1 = \varrho\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}]$$

16. Energiegleichung. Impulsgleichung. Es bezeichne W die gesamte im Volumen V enthaltene elektromagnetische Energie und ψ ihre Dichte. Dann ist

(1) $$W = \int_V \psi dv$$

Wir wollen annehmen, daß die Oberfläche F von V sich zusammen mit dem Medium bewegt. Es ergibt sich dann aus (1)

und (9) **Nr. 22** II

$$\frac{dW}{dt} = \int\limits_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathfrak{v}\psi \right) dv \tag{2}$$

Ist F eine geometrische *ruhende* Fläche oder ruht das Medium, so ist $\mathfrak{v}$ auf F gleich Null, und wir erhalten für diesen Fall statt (2)

$$\frac{dW}{dt} = \int\limits_V \frac{\partial \psi}{\partial t} dv \tag{3}$$

Wir beschäftigen uns jetzt vorläufig mit dem ersten Fall, daß F sich mit dem Medium bewegt.

Es bezeichne weiter $\mathfrak{S}$ den Vektor der Energieströmung pro Zeiteinheit durch eine mit dem Medium bewegte Flächeneinheit, vom ruhenden Beobachter aus gemessen, $\mathfrak{P}$ die Spannung auf der Oberfläche F, herrührend von den inneren Kräften, also auf den Teil des Mediums wirkend, welcher außerhalb V liegt. Es ist dann

$$-\frac{dW}{dt} = \int\limits_V \left(\mathrm{div}\mathfrak{S} + Q_1 + \mathfrak{K}_1 \mathfrak{v} \right) dv + \int\limits_F \mathfrak{P}\mathfrak{v} df \tag{4}$$

wo $Q_1 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{E}_1$ die Joulesche Wärme und $\mathfrak{K}_1$ die Kraft, beide auf die Volumeneinheit bezogen, bedeuten.

Setzen wir weiter

$$\mathfrak{P}\mathfrak{v} = \mathfrak{R}\mathfrak{n} \tag{5}$$

wo $\mathfrak{n}$ die zu F äußere Normale ist, so erhalten wir anstatt (4)

(6) $$\frac{dW}{dt} = \int\limits_V \{\mathrm{div}(\mathfrak{S} + \mathfrak{R}) + Q_1 + \mathfrak{K}_1 \mathfrak{v}\}\, dv$$

Ein Vergleich von (6) und (2) gibt die Energiegleichung pro Volumeneinheit

(7) $$\mathrm{div}(\mathfrak{S} + \psi\mathfrak{v} + \mathfrak{R}) + Q_1 + \mathfrak{K}_1 \mathfrak{v} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

Bezeichnet $\mathfrak{T}$ die Spannung auf F, herrührend von dem außerhalb von F befindlichen Medium, so ist

(8) $$\mathfrak{T} = -\mathfrak{P}$$

Ist f die Trennungsfläche zweier Medien 1 und 2, so ist die Spannung auf der Oberfläche f, die positive Normale vom Medium 1 zu Medium 2 gerechnet:

(9) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{T}_1$$

Es lautet deshalb die Impulsgleichung

(10) $$\int\limits_\infty \mathfrak{K}_1 dv + \int\limits_f \mathfrak{M} df = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}$$

wo

(11) $$\mathfrak{G} = \int\limits_\infty \mathfrak{g} dv$$

die elektromagnetische Bewegungsgröße oder Impuls und $\mathfrak{g}$ dessen Dichte bedeuten. Auf Grund von (96) I haben wir allgemein

$$(12)\quad \int\limits_F \left(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}d\mathfrak{f} - \frac{d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{A}^2}{2}\right) = \int\limits_V \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\mathfrak{A}dv - \int\limits_V [\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\mathfrak{A}]dv$$

Nun nehmen wir wieder $\epsilon = 1$ und $\mu = 1$ an. Dann ist infolge von (53) **Nr. 13**

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{K}_1 = \varrho\mathfrak{E}_1 + [\mathfrak{J}_1\mathfrak{B}] = \varrho\mathfrak{E} + [\mathfrak{J}\mathfrak{B}] = \\ \qquad = \dfrac{n}{4\pi}\mathfrak{E}\,\mathrm{div}\mathfrak{E} - \dfrac{n}{4\pi}[\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\mathfrak{E}] - \dfrac{[\mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\mathfrak{H}]}{4\pi} - \dfrac{n}{4\pi}\dfrac{\partial[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{\partial t} \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung von (12) und $\mathrm{div}\mathfrak{H} = 0$, erhalten wir demnach aus (13)

$$(14)\qquad \int\limits_V \mathfrak{K}_1 dv = \int\limits_F \mathfrak{T}df - \int \frac{n}{4\pi}\frac{\partial[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{\partial t}dv$$

wo

$$(15)\quad \mathfrak{T} = \frac{n}{4\pi}\left(\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{E}\mathfrak{n} - \mathfrak{n}\cdot\frac{\mathfrak{E}^2}{2}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{H}\mathfrak{n} - \mathfrak{n}\cdot\frac{\mathfrak{H}^2}{2}\right)$$

ist. Aus (8) und (5) folgt dann weiter

$$(16)\quad \mathfrak{R} = -\frac{n}{4\pi}\left(\mathfrak{E}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{E} - \mathfrak{v}\cdot\frac{\mathfrak{E}^2}{2}\right) - \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{H}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{H} - \mathfrak{v}\cdot\frac{\mathfrak{H}^2}{2}\right)$$

Aus (14) und (9) ergibt sich dann

(17) $$\int\limits_{\infty} \mathfrak{K}_1 dv + \int\limits_{f} \mathfrak{M} df = -\frac{d}{dt} \int \frac{n[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi} dv$$

und demnach ist die Impulsdichte

(18) $$\mathfrak{g} = \frac{n}{4\pi} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

also genau dieselbe wie bei den *Lorentz*schen Gleichungen.

Weiter erhalten wir unter Heranziehung der beiden Hauptgleichungen (1) und (2) **Nr. 13** und der Beziehung

(19) $$\mathrm{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\mathfrak{H}$$

$$\mathfrak{K}_1 \mathfrak{v} + Q_1 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{E}_1 + \varrho \mathfrak{E}_1 \mathfrak{v} + [\mathfrak{J}_1 \mathfrak{B}]\, \mathfrak{v} = \mathfrak{J}\mathfrak{E} =$$

(20) $$= -\frac{\mathrm{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi} - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mathfrak{E}^2 n + \mathfrak{H}^2 \right\}$$

Wir setzen nun

(21) $$\psi = \frac{1}{8\pi} \left(\mathfrak{E}^2 n + \mathfrak{H}^2 \right)$$

Dann folgt aus (20) und (7)

$$\mathrm{div} \left(\mathfrak{S} - \frac{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi} + \psi \mathfrak{v} + \mathfrak{R} \right) = 0$$

weshalb wir schreiben

(22) $$\mathfrak{S} = \frac{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi} - \psi\mathfrak{v} - \mathfrak{R}$$

Berücksichtigen wir nun, daß

$$[\mathfrak{E}_1\mathfrak{H}_1] = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] - n[\mathfrak{E}[\mathfrak{v}\mathfrak{E}]] - [\mathfrak{H}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]] + \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]n$$

ist, so können wir statt (22) infolge von (16) und (21) auch schreiben

(23) $$\mathfrak{S} = \frac{[\mathfrak{E}_1\mathfrak{H}_1]}{4\pi} - \frac{\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]n}{4\pi}$$

wobei, wie schon betont, unter $\mathfrak{S}$ die Energieströmung durch eine bewegte Flächeneinheit zu verstehen ist, vom ruhenden Beobachter aus beurteilt.

Würden wir die Oberfläche F als ruhend angenommen haben, so würden wir von (3) ausgegangen sein. Zugleich würde das Oberflächenintegral in (4) verschwinden, und wir hätten dann statt (7) bekommen

(24) $$\mathrm{div}\mathfrak{S}_1 + Q_1 + \mathfrak{K}_1\mathfrak{v} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

woraus dann folgen würde

(25) $$\mathfrak{S}_1 = \frac{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi}$$

wo also jetzt $\mathfrak{S}_1$ die Energieströmung durch eine ruhende Flächeneinheit bedeutet, auch vom ruhenden Beobachter aus beurteilt.

Transformieren wir auf Ruhe, so folgt aus (23)

$$\mathfrak{S}' = \frac{[\mathfrak{E}'\mathfrak{H}']}{4\pi} \tag{26}$$

wo jetzt $\mathfrak{S}'$ die vom mitbewegten Beobachter wahrgenommene Strömung bedeutet und nicht gleich $\mathfrak{S}_1$ ist, da $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ nicht gleich $\mathfrak{E}$ resp. $\mathfrak{H}$ sind.[18]

Berlin, den 9. Dez. 1910.

1. ↑ Teilweise vorgetragen im Dezember 1909 auf der Versamml. d. russ. Naturforscher und Ärzte in Moskau, im Februar 1910 in der Berliner Math. Ges. und auf der 82. Naturforscher-Versammlung in Königsberg 1910.
2. ↑ *A. Einstein*, „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“, Ann. d. Phys. 1905, Bd. 17, S. 891.
3. ↑ *H. Minkowski*, „Raum und Zeit“, Leipzig, B. G. Teubner und auch Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Ver. 18, 75-88; Phys. Zeitschr., 10, 1909, S. 104.
4. ↑ *A. Einstein*, l. c., S. 891.
5. ↑ *A. Einstein*, l. c. pag. 895.
6. ↑ Siehe den Vortrag des Verfassers auf der 82. Naturforscher-Versammlung in Königsberg 1910, und Verh. der Deutschen Phys. Ges. Heft 20, 1910.
7. ↑ *H. Minkowski*, Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-phys. Kl., S. 66. 1908.
8. ↑ Siehe den oben zitierten Vortrag des Verfassers und auch seine Arbeit in den Ann. d. Phys. 33, 607 (1910): „Der starre Körper und das Relativitätsprinzip“. Hierin sind auch Geschwindigkeiten größer als c diskutiert werden.
9. ↑ Ausführlicheres hierüber siehe im Artikel des Verfassers: „Der starre Körper und das Relativitätsprinzip“. Ann. d. Phys.

Bd. **33** S. 607, 1910.

10. ↑ ab Siehe den eben zitierten Artikel des Verfassers S. 623 Formel (4) und (5).
11. ↑ Siehe „Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik“ des Verfassers. Math-Physik. Schriften für Ing. und Stud., herausgegeb. von E. *Jahnke*, Nr. 6, Leipzig 1909/10, B. G. Teubner. Im folgenden soll bei den Zitaten der erste Teil durch I und der zweite durch II bezeichnet werden.
12. ↑ *Minkowski* l. c. S. 65.
13. ↑ *Minkowski* l. c. S. 72.
14. ↑ *M. Planck*, Zur Dynamik bewegter Systeme, Sitzungsberichte der Berl. Akad. XXIX S. 25, 1907.
15. ↑ l. c. S. 14.
16. ↑ *M. Planck*, Verbandl. d. deutsch. Phys. Ges. 1906, S. 137.
17. ↑ ab Siehe diesbezüglich die Arbeiten von *G. Nordström*, Phys. Ztsch. 1909, S. 681, 1910, S. 440 und *M. Abraham*, dieselbe Ztsch. 1909, S. 737 und 1910, S. 527.
18. ↑ Zu Nr. 15 und 16 vergleiche auch die Arbeit von *M. Abraham*: „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo XXVIII S. 1, 1909.

Über diese digitale Edition

Dieses E-Book wurde aus dem Bestand der freien Quellensammlung Wikisource, einem Schwesterprojekt der Wikipedia, erstellt. Dieses mehrsprachige Projekt, dient dem Aufbau einer Bibliothek mit frei verfügbaren Inhalten und wird ausschließlich von Freiwilligen betrieben. Wikisource umfasst eine Vielzahl von Texten: Romane, Gedichte, wissenschaftliche Aufsätze, Reportagen, Gesetze, Zeitungen und Zeitschriften und vieles mehr.

Alle Werke bei Wikisource sind entweder gemeinfrei oder stehen unter einer freien Lizenz. Sie können dieses E-Book für jeden Zweck, auch kommerzielle, verwenden und beliebig weitergeben. Im Falle, dass der Text unter einer freien Lizenz steht, sind zusätzlich die entsprechenden Lizenzbedingungen zu beachten.

Wikisource ist immer auf der Suche nach neuen Mitarbeitern. Wenn Sie Interesse an einer Mitarbeit haben, finden Sie einführenden Informationen auf der Hauptseite von Wikisource.

Bei der Erstellung des Textes kann es leider zu Fehlern kommen. Wenn Sie einen solchen finden, bitten wir um entsprechende Informationen auf dieser Wikisource-Seite oder per E-Mail an ebook@wikisource.de.

Eine Bemerkung zu meiner Arbeit: "Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip"

Wladimir Sergejewitsch Ignatowski

S. Hirzel, Leipzig, 1911

Exportiert aus Wikisource am 5. April 2021

Eine Bemerkung zu meiner Arbeit: „Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip“[1].

Von *W. v. Ignatowsky*.

Herr Ph. *Frank* machte mich brieflich in liebenswürdiger Weise darauf aufmerksam, daß der Bruch $\frac{q_1}{pq}$ (Gl. (22) meiner oben zitierten Arbeit) eventuell selbst noch eine Funktion von x und t sein könnte und deshalb nicht konstant zu sein braucht.

Diesen Einwand kann man, meiner Meinung nach, folgendermaßen beheben. Aus (17), (18), (19) und (20) meiner Arbeit folgt:

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{v} - pq\mathfrak{c}_0}{p + p_1\mathfrak{c}\mathfrak{v}} \tag{1}$$

Ist nun $\mathfrak{v}$ parallel zu $\mathfrak{c}_0$, so gilt dasselbe auch für $\mathfrak{v}'$ und wir erhalten dann aus (1), da nun $\mathfrak{v} = \mathfrak{c}_0 v$ ist, nach Weglassung des Faktors $\mathfrak{c}_0$,

$$v' = \frac{v - q}{1 + \frac{p_1}{p}v} \tag{2}$$

Dies bezieht sich auf die Geschwindigkeit einer *beliebigen* Erscheinung, von welcher selbst $t\frac{p_1}{p}$ *nicht* abhängen kann. Können wir nun für irgendeine Erscheinung nachweisen, daß bei konstantem v auch v' konstant ist, so wird nach (2) auch $\frac{p_1}{p}$ konstant sein, und zwar, wegen der Unabhängigkeit von der Erscheinung, immer konstant sein und infolgedessen auch $\frac{p_1}{pq}$, da q konstant ist. Da nun nach Gl. (22) meiner Arbeit dieser Bruch für jedes Systempaar denselben Wert hat. so wird er gleich einer *universellen* Konstanten sein, die wir durch $-n$ bezeichnet haben.

Nun läßt sich auf Grund der Definition des Relativitätsprinzips selbst zeigen, daß bei einem bestimmten konstanten v auch v' konstant sein wird.

Haben wir zwei zueinander mit konstanter Geschwindigkeit translatorisch bewegte Koordinatensysteme K und K', so besagt das Relativitätsprinzip, daß beide Systeme als gleichwertig angesehen werden können, d. h. jedes von ihnen kann als ruhend und das andere als bewegt angesehen werden. Desgleichen können wir uns ein drittes System K'' denken, das sich translatorisch mit gleichförmiger Geschwindigkeit in bezug auf K bewegt. Dasselbe ist also gleichwertig mit K. Es muß aber auch gleichwertig mit K' sein, denn sonst hätten wir in K' ein besonderes

System, welches eine Ausnahmestellung einnehmen würde, was dem Relativitätsprinzip widerspricht. Durch derartige Überlegungen müssen wir schließen[2], daß wir unendlich viele gleichwertige Systeme haben, oder, wie sich Herr *Laue* in seinem Buche ausdrückt[3]: „Es gibt eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit" gleichberechtigter Systeme, welche sich gegeneinander mit gleichförmigen Geschwindigkeiten bewegen." Dies ist als Definition des Relativitätsprinzips zu betrachten.

Wenn nun K, K' und K'' drei gleichberechtigte Systeme sind und, von K aus betrachtet, sich in einer Richtung bewegen, so ergibt uns (2) folgendes. Bedeutet v die Geschwindigkeit von K'' in bezug auf K, so ist v' die Geschwindigkeit von K'', in bezug auf K', vom letzteren aus gemessen. Nun sind aber alle drei Systeme gleichwertig, folglich sind v und v' konstant. Daraus ergibt sich also, daß $\frac{p_1}{p}$ auch konstant sein wird und infolge des früher Gesagten, daß $\frac{p_1}{pq} = -n$ eine universelle *Konstante* bedeutet.

Berlin, im Juli 1911.

(Eingegangen 1. August 1911.)

1. ↑ Diese Zeitschr. **11**, 972, 1910 und auch Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, **17**, I und **18**, 17. Mr. 5. Gl. 15.

2. ↑ Siehe Ausführlicheres in der oben zitierten Arbeit des Verfassen in dem Archiv für Mathem. u. Physik.
3. ↑ M. *Laue*, „Das Relativitätsprinzip“. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1911.

Über diese digitale Edition

Dieses E-Book wurde aus dem Bestand der freien Quellensammlung Wikisource, einem Schwesterprojekt der Wikipedia, erstellt. Dieses mehrsprachige Projekt, dient dem Aufbau einer Bibliothek mit frei verfügbaren Inhalten und wird ausschließlich von Freiwilligen betrieben. Wikisource umfasst eine Vielzahl von Texten: Romane, Gedichte, wissenschaftliche Aufsätze, Reportagen, Gesetze, Zeitungen und Zeitschriften und vieles mehr.

Alle Werke bei Wikisource sind entweder gemeinfrei oder stehen unter einer freien Lizenz. Sie können dieses E-Book für jeden Zweck, auch kommerzielle, verwenden und beliebig weitergeben. Im Falle, dass der Text unter einer freien Lizenz steht, sind zusätzlich die entsprechenden Lizenzbedingungen zu beachten.

Wikisource ist immer auf der Suche nach neuen Mitarbeitern. Wenn Sie Interesse an einer Mitarbeit haben, finden Sie einführenden Informationen auf der Hauptseite von Wikisource.

Bei der Erstellung des Textes kann es leider zu Fehlern kommen. Wenn Sie einen solchen finden, bitten wir um entsprechende Informationen auf dieser Wikisource-Seite oder per E-Mail an ebook@wikisource.de.

Einige allgemeine Bemerkungen über das Relativitätsprinzip

Wladimir Sergejewitsch Ignatowski

S. Hirzel, Leipzig, 1910

Exportiert aus Wikisource am 5. April 2021

[1]

W. v. Ignatowsky (Berlin), Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip.

Als *Einstein* seinerzeit das Relativitätsprinzip einführte, nahm er parallel mit demselben an, daß die Lichtgeschwindigkeit c eine universelle Konstante sei, d.h. für alle Koordinatensysteme denselben Wert behalte. Auch *Minkowski* ging bei seinen Untersuchungen von der Invariante $r^2 - c^2t^2$ aus, obwohl nach seinem Vortrage „Raum und Zeit“[1] zu urteilen, er dem c mehr die Bedeutung einer universellen Raum–Zeit-Konstante beilegte, als diejenige der Lichtgeschwindigkeit.

Nun habe ich mir die Frage gestellt, zu welchen Beziehungen bezw. Transformationsgleichungen man kommt, wenn man nur das Relativitätsprinzip an die Spitze der Untersuchung stellt und ob überhaupt die *Lorentz*schen Transformationsgleichungen die einzigen sind, die dem Relativitätsprinzip genügen.

Um diese Fragen beantworten zu können, wiederholen wir noch einmal, was uns das Relativitätsprinzip an und für sich ergibt.

Haben wir zwei zueinander mit konstanter Geschwindigkeit translatorisch bewegte Koordinatensysteme K und K', so besagt uns das

Relativitätsprinzip, daß beide Systeme als gleichwertig angesehen werden können, d. h. jedes von ihnen kann als ruhend und das andere als bewegt angesehen werden. Mit anderen Worten: wir können keine absolute Bewegung bestimmen.

Sind aber K und K' gleichwertig und können wir im System K irgendeine physikalische Größe E durch eine Funktion der Parameter $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ausdrücken, also schreiben

$$E = \varphi\left(a_1, a_2, a_3, \ldots\right), \tag{1}$$

so muß die entsprechende Größe E' im System K' durch dieselbe Funktion φ der entsprechenden Parameter $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$ ausgedrückt werden können, d. h. es wird sein

$$E' = \varphi\left(a'_1, a'_2, a'_3, \ldots\right). \tag{2}$$

Angenommen, wir würden E' durch die ungestrichenen Parameter darstellen, z. B.

$$E' = f\left(a_1, a_2, a_3, \ldots\right) \tag{3}$$

so muß, da K und K' sind, die Gleichung

$$E = f\left(a'_1, a'_2, a'_3, \ldots\right) \tag{4}$$

richtig sein. Die Gleichungen (1) bis (4) bilden die mathematische Formulierung des Relativitätsprinzips.

Bezeichnet weiter q die Geschwindigkeit des Systems K' in bezug auf K, von letzterem aus gemessen, und q' die Geschwindigkeit des Systems K von K' aus gemessen, so muß augenscheinlich sein

$$q' = -q. \tag{5}$$

Betrachten wir nun einen rein kinematischen Vorgang, wo also nur x, y, z und t in Betracht kommen, so können wir z. B. folgende Gleichung hinschreiben

$$x' = \varphi(x, y, z, t, q) \tag{6}$$

und ähnliche für y', z' und t'. Denn x, y, z und t sind als Parameter zu betrachten, durch welche, unter anderen, eine physikalische Erscheinung beschrieben werden kann, und aus (1) bis (4) ersehen wir, daß im allgemeinen a_1 nicht gleich a'_1 zu sein braucht.

Obwohl die folgenden Rechnungen sehr elementar sind, so werde ich hier, zwecks Raumersparnis, nur den Gedankengang und die Endresultate anführen, und verweise auf die näheren Details in einem Artikel von mir, der demnächst in dem Archiv f. Math. u. Phys. erscheinen wird.

Wir bezeichnen den Einheitsvektor, der die Richtung in der Bewegung von K' in bezug auf K angibt, durch $\mathfrak{c}_0$, legen die X- bezw. X'-Achse in diese Richtung und nehmen weiter zur Vereinfachung an, daß die X'-Achse die Verlängerung der X-Achse bildet. Da der Raum als homogen und isotrop anzunehmen ist, so läßt sich hieraus und aus Symmetriegründen zeigen, daß in der Gleichung (6) y und z nur implizite durch r auftreten können, wo r die Entfernung eines Punktes von der X-Achse bedeutet. Weiter läßt sich zeigen, daß $r = r'$ sein muß und infolgedessen kann x' nicht von r abhängen. Wir können deshalb statt (6) schreiben

$$\left.\begin{aligned} x' &= \varphi(x, t, q) \\ t' &= f(x, t, q) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und entsprechend wegen (3) und (4)

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(x', t', q') \\ t &= f(x', t', q') \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Nehmen wir das vollständige Differential von (7) und (8), so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} dx' &= p dx + s dt \\ dt' &= p_1 dx + s_1 dt \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und

$$\left.\begin{aligned} dx &= p'dx' + s'dt' \\ dt &= p'_1 dx' + s'_1 dt' \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wo p, s, p', s' usw. die entsprechenden partiellen Differentialquotienten bedeuten, welche wir vorläufig noch als unbekannte Funktionen von x, t, q bezw. x', t', q' betrachten müssen. [2] Es bezeichne D die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} p p_1 \\ s s_1 \end{vmatrix} = p s_1 - p_1 s \tag{11}$$

so folgt aus (9) und [(10)

$$\left.\begin{aligned} p' &= \frac{s_1}{D}; & s' &= -\frac{s}{D} \\ p'_1 &= -\frac{p_1}{D}; & s'_1 &= \frac{p}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir nehmen jetzt in K und K' zwei Elemente dx und dx' von solcher Länge, daß, wenn sie gegenseitig auf Ruhe gebracht würden, sie gleich lang sind. Messen wir jetzt dx' synchron von K aus (also $dt = 0$), so erhalten wir

$$dx' = p dx. \tag{13}$$

Messen wir dx synchron von K' aus (also $dt' = 0$), so folgt, dementsprechend

$$dx = p' dx' . \tag{14}$$

Nun sind beide Systeme K und K' gleichwertig und dx und dx', gegenseitig auf Ruhe gebracht, gleich lang. Folglich müssen die von beiden Systemen aus gemessenen Längen gleich sein. Also ist

$$p = p' . \tag{15}$$

Hieraus und (12) ergibt sich

$$p^2 = s_1 s_1' . \tag{16}$$

Verfolgen wir jetzt die Bewegung irgendeines substantiellen Punktes oder irgendeiner Erscheinung im Raum und bezeichnen die entsprechende Geschwindigkeit durch $\mathfrak{v}$ bezw. $\mathfrak{v}'$. Es ist dann auf Grund von (9) leicht nachzuweisen, daß

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} + s\mathfrak{c}_0}{A} , \tag{17}$$

ist, wo

$$A = s_1 + p_1 \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} . \tag{18}$$

bedeutet

Da $\mathfrak{v}$ vollständig willkürlich ist, so ist klar, daß p, s usw. von $\mathfrak{v}$ nicht abhängen können. Nehmen wir an, der bewegliche Punkt ruhe in bezug auf K'. Dann ist $\mathfrak{v}' = 0$ und $\mathfrak{v} = q\mathfrak{c}_0$. Hieraus und aus (17) erhalten wir

$$s = -pq. \tag{19}$$

Auf Grund des Vorhergehenden erhalten wir durch ähnliche Überlegungen

$$s_1 = p, \tag{20}$$

so daß wir schreiben können

$$\left.\begin{aligned} dx' &= pdx - pqdt \\ dt' &= p_1 dx + pdt. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Es bleibt uns nur noch p_1 und p zu bestimmen, denn die gestrichenen Größen erhalten wir aus (12).

Zu diesem Zweck führen wir noch ein drittes Koordinatensystem K'' ein, welches sich in derselben Richtung $\mathfrak{c}_0$ bewegt, mit einer Geschwindigkeit q_2, gemessen von K aus. Die Geschwindigkeit von K' gemessen von K'' aus, ist q_1. Für das Paar $K''K'$ bezeichnen wir die den p_1, p, q analogen Größen durch

$\overline{p_1}, p, q_1$ und für das Paar KK'' durch p'', p_1'', q_2. Dann läßt sich leicht nachweisen, daß folgende Beziehung existiert:

$$\frac{p_1}{pq} = \frac{\overline{p_1}}{pq_1} = \frac{p_1''}{p''q_2}. \tag{22}$$

Da hier jeder Bruch voneinander unabhängige Größen enthält, so ersehen wir, daß derselbe nur eine Konstante sein kann, die wir durch $-n$ bezeichnen. Wir erhalten also endgültig

$$\left.\begin{aligned} dx' &= pdx - pqdt \\ dt' &= -pqndx + pdt. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Aus (15) und (12) ergibt sich ferner

$$p^2 = \frac{1}{1 - q^2 n}$$

oder

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 n}}. \tag{24}$$

Aus (24) folgt, daß n, welche Größe wir als eine universelle Raum—Zeit-Konstante bezeichnen können,

das reziproke Quadrat einer Geschwindigkeit ist, also eine absolut positive Größe.

Wir ersehen, daß wir den *Lorentz*schen ähnliche Transformationsgleichungen erhalten haben, nur daß an Stelle von $\frac{1}{c^2}$ hier n steht.

Außerdem ist aber noch das Zeichen unbestimmt, denn wir konnten ebensogut unter der Wurzel in (24) das Pluszeichen setzen.

Um jetzt nun den Zahlenwert und das Zeichen von n zu bestimmen, müssen wir uns an das Experiment wenden. Da wir uns bei der obigen Ableitung auf keine spezielle physikalische Erscheinung gestützt haben, so folgt, daß wir auf Grund einer beliebigen Erscheinung n bestimmen können und immer denselben Wert für n bekommen müssen, denn n ist ja eine universelle Konstante.

Wir können z. B. die Länge eines bewegten Meters von uns aus synchron messen. Ergibt die Messung, daß er sich verkürzt hat, so ist das Minuszeichen zu wählen und aus der Verkürzung läßt sich dann n berechnen. Nun wird aber bekanntlich diese Verkürzung so klein sein, daß wir sie nicht direkt werden messen können.

Wir wenden uns jetzt zu den elektrodynamischen Gleichungen und speziell zu dem Fall einer gleichförmig

bewegten Punktladung. Wir wissen, abgesehen vom Relativitätsprinzip, daß die Niveaufläche des Konvektionspotentials obiger Punktladung für den ruhenden Beobachter ein Heaviside-Ellipsoid sein wird, dessen Achsenverhältnis gleich $\sqrt{1-q^2/c^2}$ ist. Nun müssen wir auf Grund des Relativitätsprinzips schließen, daß für den mit der Punktladung mitbewegten Beobachter die Niveaufläche des Potentials eine [3] Kugel ist. Eine Kugel wird aber dem ruhenden Beobachter als ein Ellipsoid, mit dem Achsenverhältnis gleich $\sqrt{1-q^2 n}$, erscheinen. Demnach muß sein $\sqrt{1-q^2/c^2} = \sqrt{1-q^2 n}$. Dies ergibt

$$n = \frac{1}{c^2}. \tag{25}$$

Und hieraus erst folgt, daß c für alle Koordinatensysteme konstant ist. Zugleich ersehen wir, daß durch den Zahlenwert von c die universelle Raum–Zeit-Konstante n bestimmt wird.

Es ist jetzt klar, daß durch obige Ableitung der Transformationsgleichungen die Optik ihre Sonderstellung in bezug auf das Relativitätsprinzip verloren hat. Dadurch gewinnt das Relativitätsprinzip selbst an allgemeinerer Bedeutung, denn es hängt nicht

mehr von einer speziellen physikalischen Erscheinung, sondern von der universellen Konstante n ab.

Dennoch können wir der Optik bezw. den elektrodynamischen Gleichungen eine Sonderstellung einräumen, aber nicht in bezug auf das Relativitätsprinzip, sondern in bezug auf die anderen Zweige der Physik, und zwar insofernm, als es möglich war, aus diesen Gleichungen die Konstante n zu bestimmen.

Wenn wir anderseits die andern physikalischen Gleichungen dem Relativitätsprinzip entsprechend umformen und dabei das Vorkommen in denselben der Konstante n ersehen, so brauchen wir durchaus nicht zu schließen, daß hierbei irgendwelche elektrische Kräfte im Spiele sind, sondern folgern vom Standpunkte des Relativitätsprinzips aus nur, daß Raum und Zeit ihr Gepräge auf alle physikalischen Erscheinungen aufdrücken vermittelst der Konstante n.

Um noch deutlicher die Bedeutung von n zu veranschaulichen, ziehen wir eine Analogie aus der Optik heran, und zwar die Beziehung zwischen Bild und Objekt. Vom rein optisch-geometrischen Standpunkte aus sind Objekt und Bild vertauschbar. Genau dasselbe trifft zu, wenn wir einen bewegten Maßstab beobachten, der uns verkürzt erscheint. Wir können sagen, daß Raum und Zeit uns den bewegten Maßstab abbilden, so daß wir nur

das Bild desselben sehen, wenn wir den ruhenden Maßstab als Objekt annehmen.

Wir können also in vollem Maße *Minkowski* beistimmen, welcher in seinem Vortrage „Raum und Zeit“[2] sagt: „Die Kontraktion ist nicht etwa als Folge von Widerständen im Äther zu denken, sondern rein als Geschenk von oben, als Begleitumstand des Umstandes der Bewegung“, eben weil n eine universelle Konstante ist.

Zum Schlusse möchte ich noch mit ein paar Worten die vom Standpunkte des Relativitätsprinzips aus möglichen Geschwindigkeiten erwähnen.

Betrachten wir den Ausdruck (24) für p.

Von p hängt die Verkürzung ab, die wir bei einer mit dem System K' bewegten Strecke beobachten. Es hat deshalb keinen Sinn, anzunehmen, daß p imaginär werden kann, d. h. q muß stets kleiner als c sein. Was bedeutet aber q? Es bedeutet q die Geschwindigkeit des Koordinatensystems K', und also kann diese nicht größer als c sein. Mit anderen Worten: keines von den Ruhekoordinatensystemen kann sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen. Nun dürfen wir aber unter einem Ruhekoordinatensystem nicht etwa nur ein mathematisches Gebilde verstehen, sondern müssen uns dabei eine materielle Welt mit ihren Beobachtern und

synchronen Uhren denken. Umgekehrt nehmen wir an, daß wir jeden substantiellen Punkt auf Ruhe transformieren können. Hieraus folgt demnach, daß sich ein substantieller Punkt nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen kann.

Nun fragt es sich: Gibt es Geschwindigkeiten, nicht von substantiellen Punkten, sondern von Erscheinungen, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist, abgesehen von Phasen- bezw. von Gruppengeschwindigkeiten? Diese Frage müssen wir im bejahenden Sinne beantworten.

Ohne auf die näheren Details einzugehen, in bezug auf welche ich auf meine letzte Arbeit in den Ann. d. Phys. verweise[3], möchte ich hier nur in Kürze an einem Beispiel diese Frage erläutern.

Aus den *Lorentz*schen Transformationsgleichungen läßt sich folgendes leicht ableiten.

Es bedeute $x_2 - x_1$ die Entfernung zweier im System K festen Punkte in der Richtung von $\mathfrak{c}_0$. Diese Entfernung werde nun vom bewegten Beobachter in K' synchron gemessen, wobei er die Strecke l' erhält. Für den ruhenden Beobachter werden dabei die beiden synchronen Uhren, die der Beobachter in K' an den beiden Enden von l' aufgestellt hat, um seine synchrone Messung von $x_2 - x_1$ zu machen, eine Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ aufweisen, die gleich ist:

$$t_2 - t_1 = qn\,(x_2 - x_1), \tag{26}$$

hieraus folgt

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q}. \tag{27}$$

Nun denken wir uns in dem System K' einen Stab von der Länge l' und nehmen an, die Beobachter auf K' hätten sich verabredet, den Stab zu gleicher Zeit (mit Hilfe ihrer synchronen [4] Uhren) an beiden Enden, senkrecht zu $\mathfrak{c}_0$, aufzuheben. Für den ruhenden Beobachter wird dies aber nicht zu gleicher Zeit geschehen, und zwar wird ihm in dem Moment, wo das eine Ende des Stabes mit x_1 zusammenfällt, dasselbe erhoben erscheinen, das andere Ende erst dann, wenn es mit dem Punkt x_2 zusammenfällt, also nach einer Zeit $t_2 - t_1$, die sich aus (26) berechnet. Der Stab wird für den ruhenden Beobachter einen Knick aufweisen, der sich für ihn mit einer Geschwindigkeit $V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ bewegen wird. Aus (28) erhalten wir

$$V = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q} > c, \tag{28}$$

denn q ist, wie früher bemerkt, stets kleiner als c.

Wir wenden uns jetzt zu der Gleichung (17), welche wir, da uns jetzt alle Größen p, s, p_1 und s_1 bekannt sind, folgendermaßen schreiben können:

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} - pq\mathfrak{c}_0}{p(1 - qn\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v})}. \tag{29}$$

Nun nehmen wir an, es bewege sich etwas in der Richtung von $\mathfrak{c}_0$ mit einer Geschwindigkeit v. Dann ist $\mathfrak{v} = v\mathfrak{c}_0$, und wir erhalten aus (29), wenn wir zugleich den Einheitsvektor $\mathfrak{c}_0$ streichen,

$$v' = \frac{v - q}{1 - vqn}. \tag{30}$$

Aus (28) ersehen wir, daß sich der Knick für uns, d. h. für den ruhenden Beobachter, um so schneller fortpflanzt, je kleiner q ist, also je langsamer sich K' in bezug auf K bewegt. Denken wir uns jetzt an die Stelle der bewegten Beobachter, so wird uns die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Knickes unendlich groß erscheinen, denn die Beobachter heben ja den Stab zu *gleicher* Zeit laut *ihren* synchronen Uhren auf. Dasselbe Resultat erhalten wir auch aus (30). Denn ersetzen wir dort den Wert von v durch V aus (28), so ergibt sich $v' = \infty$.

Wir können demnach sagen, um die Bedeutung von V noch prägnanter zu charakterisieren, daß V diejenige Geschwindigkeit ist, welche man im System K benötigt, um die Zeit im System K' einzuholen.

Die Existenz der Geschwindigkeit

$$V = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q} > c$$

ist als eine Folgerung aus dem Relativitätsprinzip aufzufassen und insbesondere ergibt sie sich als unmittelbare Konsequenz der Begriffe von synchronen Uhren und synchronen Messungen.

(Eingegangen 23. September 1910.)

Diskussion.

Sommerfeld: Die Unmöglichkeit der Überlichtgeschwindigkeit bei Vorgangsgeschwindigkeiten ist von *Einstein* daraus geschlossen, daß, oder wie er drastisch sagt, daß man mit der Überlichtgeschwindigkeit in die Vergangenheit telegraphieren könnte. Damit ist gemeint, nicht die Geschwindigkeit irgendeines Vorganges, sagen wir mal Signalgeschwindigkeit. Es gibt zweifellos mannigfache

Vorgänge, die sich auch nach der Relativtheorie mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzen dürfen. Bei anormal dispergierenden Körpern z. B. pflanzt sich die Phase des Lichtes fort mit einer Geschwindigkeit, die Überlichtgeschwindigkeit sein kann. Ein Widerspruch gegen das Relativitätsprinzip ist das gewiß nicht, denn mit einem ununterbrochenen periodischen Wellenzuge kann man kein Signal geben. Neulich hat mir Herr *Einstein* ein anderes einfaches Beispiel mitgeteilt, bei dem ebenfalls Überlichtgeschwindigkeit vorhanden ist, aber auch da handelt es sich nicht um eine „Signalgeschwindigkeit“. Denken Sie sich zwei Lineale, die unter einem sehr spitzen Winkel gegeneinander geneigt sind und bewegen Sie das eine etwa mit 1 cm Geschwindigkeit gegen das andere, so pflanzt sich der Schnittpunkt auf dem andern mit beliebig großer Geschwindigkeit fort. Sollte das Beispiel des Herrn Vortragenden nicht auch mehr Ähnlichkeit mit diesem Vorgang haben als mit einem Signal.

Vortragender: Gewiß; als Signalgeschwindigkeit habe ich das auch nicht bezeichnet. Wenn wir zwei Haken aufstellen, so wird, wenn wir den Stab bewegen, der Knick an den beiden Haken anstoßen, und wir können die Geschwindigkeit des Knicks messen. Ich möchte vorläufig dahin gestellt sein lassen, ob man damit auch Signale übertragen kann. Ich bin darauf gekommen durch die Untersuchungen über starre Körper (siehe Annalen der Physik 33, 607, 1910), wobei der starre Körper nach

der *Euler*schen Methode behandelt wurde. Dabei ergibt sich, daß die Geschwindigkeit sich innerhalb eines starren Körpers in ihrer eigenen Richtung mit einer Geschwindigkeit c^2/v fortpflanzt.

Sommerfeld: Ich glaube, der Begriff des starren Körpers muß so weit modifiziert werden, daß die Reaktionen in ihm sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzen.

Vortragender: Wenn wir von der *Born*schen Differentialgleichung ausgehen, so kommen wir zu einer Geschwindigkeit größer als die des Lichtes für die Fortpflanzung der Geschwindigkeit selbst. Wir haben ein Volumenelement, das wir als starr betrachten. Dieses Volumenelement [5] bei seiner Bewegung auf Ruhe transformiert erhält seine Form. Das ist die *Born*sche Differentialgleichung. Halten wir diese Bedingung ein, so ergibt sich Überlichtgeschwindigkeit. Wir wissen vorläufig nicht, wie sich tatsächlich der Körper bewegen wird, da wir keine Aussage über die inneren Kräfte des Körpers machen können. Die *Born*sche Differentialgleichung ist nur *eine* Bedingung, der die Bewegung des starren Körpers genügen muß.

Born: Ich möchte zu der Bemerkung über den starren Körper nur einige Worte hinzufügen. In der Tat pflanzt sich in diesem jede Wirkung für einen mitbewegten Beobachter momentan, also für einen ruhenden

Beobachter mit Überlichtgeschwindigkeit fort. Könnte man zeigen, daß das dem Relativitätsprinzip widerspricht, indem man auf diese Weise „in die Vergangenheit telegraphieren“ kann, so müßte man den Begriff des starren Körpers wohl aufgeben. Die Differentialausdrücke, durch deren Verschwinden ich die Starrheit definiert habe, blieben damit doch brauchbar, denn da sie ein Maß für die Deformation des Volumenelementes sind, müßten sie die Grundlage für eine dem Relativitätsprinzip genügende Elastizitätstheorie abgeben. Wie jene von dem Herrn Vortragenden erwähnte „Fortpflanzung der Geschwindigkeit mit Überlichtgeschwindigkeit“ zustande kommt, kann man in der Darstellung *Minkowskis* ganz anschaulich machen. Ich denke mir eine Stange von der Länge l (der Redner zeichnet bei dem folgenden an der Tafel) und lege sie parallel der y-Achse; senkrecht auf der xy-Ebene trage ich als dritte Koordinate die Zeit auf, um mir die sukzessiven Lagen der Stange zu vergegenwärtigen. Wenn die Stange ruht, wird sie offenbar durch Striche dargestellt, die in der t-Richtung übereinander liegen und sich zu einem ebenen Bande parallel der yt-Ebene zusammenfassen lassen. Gibt man nun der Stange eine Bewegung in der Richtung der x-Achse, so läuft das darauf hinaus, daß dieses Band nach der x-Richtung hin verbogen wird. Soll die Stange am Schlusse wieder ruhen, so wird das Band schließlich wieder parallel der yt-Ebene. Um nun zu zeigen, daß der

Vorgang sich mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzt, nehme ich ein neues, bewegtes Koordinatensystem, d. h. in unserer Figur, ich führe gemäß den *Lorentz*schen Transformationen schiefwinklige Parallelkoordinaten ein, bei denen die t'-Achse gegen die t-Achse und die $x'y'$-Ebene gegen die xy-Ebene geneigt ist. In diesem System werden gleichzeitige Ereignisse durch Ebenen dargestellt, die gegen die alte xy-Ebene schief liegen. Schneidet man nun das vorhin konstruierte verbogene Blatt mit einer solchen schiefen Ebene, so ist der Schnitt offenbar nicht gerade, sondern hat eine Ausbiegung, die sich nach rechts verschiebt, wenn man die schneidende Ebene nach oben rückt, d. h. sie bewegt sich nach rechts mit Überlichtgeschwindigkeit. Das andere Beispiel, von dem Herr *v. Ignatowsky* gesprochen, bezieht sich auf die Bewegung, die ich als Hyperbelbewegung bezeichnet habe (das Folgende wird wiederum an einer Zeichnung erläutert). Diese wird in der xt-Ebene durch eine Schar von Hyperbeln dargestellt, die die Geraden $x = \pm ct$ zu Asymptoten haben. Sie genügt meinen Differentialgleichungen der Starrheit und man kann leicht einsehen, daß die Punkte die gleiche Geschwindigkeit haben, auf den durch den Nullpunkt gehenden Geraden liegen. Diese Linien stehen aber schräg und ihre Neigung ist kleiner als die der Geraden $x = \pm ct$. Die Stelle, wo die Geschwindigkeit q herrscht, pflanzt sich also durch den Körper mit Überlichtgeschwindigkeit fort.

Vortragender: Ich hatte darüber noch einige Worte hinzufügen wollen. *Einstein* kommt auf folgende Formel hinaus (Annalen der Physik **23**, 381, 1907),

$$T = l\frac{1 - Wv/V^2}{W - v}$$

und sagt, daß, wenn W größer als V ist (V bei *Einstein* ist das, was im Vortrag mit c bezeichnet war), man v stets so wählen kann, daß T kleiner als Null, also T negativ wird, d. h. daß man in die Vergangenheit telegraphieren könnte. Wenn man aber W gleich V^2/v (c^2/q im Vortrag) setzt, so wird der Zähler hier gleich Null, d. h. die Geschwindigkeit wird unendlich für das Koordinatensystem, in welchem der Stab sich befindet. Denn diese Geschwindigkeit (c^2/q) ist nichts anderes als diejenige, welche nötig ist, um die Zeit im bewegten Koordinatensystem, in welchem der Stab sich befindet, von uns aus, vom ruhenden System aus, einzuholen. Denn hätten wir eine Uhr, die sich mit dieser Geschwindigkeit von uns aus gerechnet bewegen würde, so bewegt sie sich für das Koordinatensystem, wo sich der Stab befindet, nach dem Obigen mit unendlich großer Geschwindigkeit; das kommt darauf hinaus, daß sie überall in dem System gleichzeitig vorhanden wäre. Also befinden sich in dem System beliebig viele synchrone Uhren, woraus folgt, daß diese Geschwindigkeit tatsächlich diejenige ist, um die Zeit in dem bewegten

System einzuholen. Es ist also dieser Wert c^2/q die Grenzgeschwindigkeit, bei welcher der Zähler obiger Formel Null wird, also T gleich O, aber nicht negativ. Eine größere Geschwindigkeit kann man sich eben nicht vorstellen.

---

1. ↑ Diese Zeitschr. 10, 104, 1909.
2. ↑ l. c., S. 106.
3. ↑ Bd. 33, 607, 1910.

Über diese digitale Edition

Dieses E-Book wurde aus dem Bestand der freien Quellensammlung Wikisource, einem Schwesterprojekt der Wikipedia, erstellt. Dieses mehrsprachige Projekt, dient dem Aufbau einer Bibliothek mit frei verfügbaren Inhalten und wird ausschließlich von Freiwilligen betrieben. Wikisource umfasst eine Vielzahl von Texten: Romane, Gedichte, wissenschaftliche Aufsätze, Reportagen, Gesetze, Zeitungen und Zeitschriften und vieles mehr.

Alle Werke bei Wikisource sind entweder gemeinfrei oder stehen unter einer freien Lizenz. Sie können dieses E-Book für jeden Zweck, auch kommerzielle, verwenden und beliebig weitergeben. Im Falle, dass der Text unter einer freien Lizenz steht, sind zusätzlich die entsprechenden Lizenzbedingungen zu beachten.

Wikisource ist immer auf der Suche nach neuen Mitarbeitern. Wenn Sie Interesse an einer Mitarbeit haben, finden Sie einführenden Informationen auf der Hauptseite von Wikisource.

Bei der Erstellung des Textes kann es leider zu Fehlern kommen. Wenn Sie einen solchen finden, bitten wir um entsprechende Informationen auf dieser Wikisource-Seite oder per E-Mail an ebook@wikisource.de.

Some general remarks on the relativity principle

Vladimir Ignatowski

1910

Exported from Wikisource on April 5, 2021

Some general remarks on the relativity principle.

W. v. IGNATOWSKY (Berlin)

When EINSTEIN introduced the relativity principle some time ago, he simultaneously assumed that the speed of light c shall be a universal constant, i.e. it maintains the same value in all coordinate systems. Also MINKOWSKI started from the invariant $r^2 - c^2t^2$ in his investigations, although it is to be concluded from his lecture "Space and Time"[1], that he attributed to c the meaning of a universal space-time constant rather than that of the speed of light.

Now I've asked myself the question, at which relations or transformation equations one arrives when only the relativity principle is placed at the top of the investigation, and whether the LORENTZian transformation equations are the only ones at all, that satisfy the relativity principle.

In order to answer this question, we again repeat what is given to us by the relativity principle *per se*.

If we have two coordinate systems K and K', being in translatory motion with respect to each other, then the relativity principle says that both systems can be seen as equally valid, i.e. any of them can be seen as at rest and the

other one as in motion. In other words: we cannot determine absolute motion.

However, if K and K' are equally valid, and if we can express in system K any physical quantity E by a function of parameters $a_1, a_2, a_3 \ldots$, *i.e.* by writing

$$E = \varphi\left(a_1, a_2, a_3, \ldots\right), \tag{1}$$

then it must be possible that the corresponding quantity E' in system K' can be expressed by the same function φ of the corresponding parameters $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots$, *i.e.* it will be

$$E' = \varphi\left(a'_1, a'_2, a'_3, \ldots\right). \tag{2}$$

If it is assumed that we represent E' by the unprimed parameters, for instance

$$E' = f\left(a_1, a_2, a_3, \ldots\right) \tag{3}$$

then, since K and K' are equally valid, the equation

$$E = f\left(a'_1, a'_2, a'_3, \ldots\right) \tag{4}$$

must be correct. Equations (1) to (4) form the mathematical formulation of the relativity principle.

Furthermore, if q denotes the velocity of system K' with respect to K as measured by the latter, and q' the velocity of system K as measured from K', then it evidently must be

$$q' = -q. \tag{5}$$

If we now consider a purely kinematic process, i.e., where only x, y, z and t come into consideration, then for instance we can write the following equation

$$x' = \varphi(x, y, z, t, q) \tag{6}$$

and similar ones for y', z' and t'. Because x, y, z and t are to be considered as parameters by which (among other things) a physical phenomenon can be described, and from (1) to (4) we see that a_1 in general doesn't have to be equal to a'_1.

Although the following calculations are very elementary, I only will give the reasoning and the end results in order to save space, and allude for further details to an article of mine which will appear in the Archiv f. Math. u. Phys. soon.

We denote by $\mathfrak{c}_0$ the unit vector that gives the direction of the motion of K' with respect to K, then we lay the X- or the X'-axis into this direction, and further assume for

simplification that the X'-axis forms the elongation of the X-axis. Since space is to be assumed as being homogeneous and isotropic, it can be shown from that and from reasons of symmetry that y and z can only implicitly occur through r in equation (6), where r is the distance of a point from the X-axis. Furthermore it can be shown that $r = r'$, and consequently x' cannot depend on r. Therefore we can write instead of (6)

$$\left.\begin{aligned} x' &= \varphi(x, t, q) \\ t' &= f(x, t, q) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

and accordingly because of (3) and (4)

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(x', t', q') \\ t &= f(x', t', q') \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

If we take the complete differential of (7) and (8), then it is given

$$\left.\begin{aligned} dx' &= p dx + s dt \\ dt' &= p_1 dx + s_1 dt \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

and

$$\left.\begin{aligned} dx &= p' dx' + s' dt' \\ dt &= p'_1 dx' + s'_1 dt' \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

where p, s, p', s' etc. denote the corresponding partial derivatives, which we preliminarily must be consider as unknown functions of x, t, q and x', t', q'. D shall denote the determinant

$$D = \begin{vmatrix} pp_1 \\ ss_1 \end{vmatrix} = ps_1 - p_1 s \tag{11}$$

then it follows from (9) and (10)

$$\left.\begin{aligned} p' &= \frac{s_1}{D}; & s' &= -\frac{s}{D} \\ p'_1 &= -\frac{p_1}{D}; & s'_1 &= \frac{p}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Now we take in K and K' two elements dx and dx' of such length, so that they are equal when brought to mutual rest. If we now synchronously measure dx' from K (thus $dt = 0$), then we obtain

$$dx' = pdx \tag{13}$$

If we synchronously measure dx from K' (thus $dt' = 0$), then it follows accordingly

$$dx = p'dx' \tag{14}$$

Both systems K and K' are now equally valid, and dx and dx' have the same length when brought to mutual rest.

Consequently, the lengths measured from both systems must be equal. Thus

$$p = p' \tag{15}$$

From that and (12) it follows

$$p^2 = s_1 s_1' \tag{16}$$

Let us now follow the motion of any substantial point or any phenomenon in space, and denote the corresponding velocity by $\mathfrak{v}$ or $\mathfrak{v}'$. Then it can be simply demonstrated due to (6), that

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} + s\mathfrak{c}_0}{A}, \tag{17}$$

where

$$A = s_1 + p_1 \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v}. \tag{18}$$

Since $\mathfrak{v}$ is totally arbitrary, it is clear that p, s etc. cannot depend on $\mathfrak{v}$. Let us assume that the movable point rests with respect to K'. Then $\mathfrak{v}' = 0$ and $\mathfrak{v} = q\mathfrak{c}_0$. From that and from (17) we obtain

$$s = -pq \tag{19}$$

Because of the preceding things we obtain by similar considerations

$$s_1 = p \tag{20}$$

so that we can write

$$\left.\begin{aligned} dx' &= pdx - pqdt \\ dt' &= p_1 dx + pdt. \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

It only remains to determine p_1 and p, because the unprimed quantities can be obtained from (12).

For that purpose we introduce a third coordinate system K'', which moves in the same direction $\mathfrak{c}_0$ with velocity q_2 measured in K. The velocity of K' as measured in K'' is q_1. We denote by $\overline{p_1}, p, q_1$ the quantities analogous to p_1, p, q for couple $K''K'$, and by p'', p_1'', q_2 the ones for couple KK''. Then it can easily be demonstrated that the following relation exists:

$$\frac{p_1}{pq} = \frac{\overline{p_1}}{pq_1} = \frac{p_1''}{p''q_2} \tag{22}$$

Since every fraction contains mutually independent quantities here, we can see that it can only be a constant, which we denote by $-n$. Thus we eventually obtain

$$\left.\begin{aligned} dx' &= pdx - pqdt \\ dt' &= -pqndx + pdt. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Furthermore, it follows from (15) and (12)

$$p^2 = \frac{1}{1 - q^2 n}$$

or

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 n}} \tag{24}$$

From (24) it follows, that n (which we can denote as a universal space-time constant) is the reciprocal square of a velocity, thus an absolute-positive quantity.

We see that we obtained transformation equations similar to those of LORENTZ, except that n is used instead of $\frac{1}{c^2}$. However, the sign is still undetermined, because we could have set the positive sign under the square root in (24) as well.

Now, in order to determine the numerical value and the sign of n, we have to look at the experiment. Since we haven't used in the previous derivation any special physical phenomenon, it follows that we can determine n by using

an arbitrary phenomenon, and we always must obtain the same value for n, since n is indeed a universal constant.

For instance, we can measure the length of a moving meter synchronously. If the measurement shows that it has been contracted, then the negative sign is to be chosen, and n can be calculated from the contraction. However, it's known that the contraction will be so small that we cannot measure it directly.

We now turn to the electrodynamic equations and especially to the case of a uniformly moving point-charge. We know, besides the relativity principle, that the level-surface of the convection potential of the previous point-charge will be a HEAVISIDE-Ellipsoid for the resting observer, whose axis ratio is equal to $\sqrt{1-q^2/c^2}$. Now we must conclude due to the relativity principle, that the level-surface of the potential is spherical for an observer co-moving with the point-charge. However, a sphere will appear to the resting observer as an ellipsoid, with an axis ratio equal to $\sqrt{1-q^2n^2}$. Therefore, $\sqrt{1-q^2/c^2} = \sqrt{1-q^2n^2}$. This gives

$$n = \frac{1}{c^2} \tag{25}$$

And only from that it follows, that c is constant for all coordinate systems. At the same time we see that the universal space-time constant n is determined by the numerical value of c.

Now it is clear that optics lost its special position with respect to the relativity principle by the previous derivation of the transformation equations. By that, the relativity principle itself gains more general importance, because it doesn't depend on a special physical phenomenon any more, but on the universal constant n.

Nevertheless we can grant optics or the electrodynamic equations a special position, though not in respect to the relativity principle, but in respect to the other branches of physics, namely in so far as it is possible to determine the constant n from these equations.

On the other hand, when we transform the other physical equations in accordance with the relativity principle, and at that occasion see the occurrence of constant n, then we don't have to conclude at all that electrical forces are in play, but we only conclude from the standpoint of the relativity principle, that space and time impress their character upon all physical phenomena by means of constant n.

In order to illustrate the meaning of n still further, we use an analogy from optics, namely the relation between image

and object. From the pure optical standpoint, object and image are interchangeable. Exactly the same is true when we consider a moving measuring rod that appears to us as being contracted. We can say that space and time project this moving measuring rod to us, so that we can only see the image of it when we assume the resting measuring rod as being an object.

Thus we can completely agree with MINKOWSKI, who says in his lecture "Space and Time"[2]: "The contraction is not, for example, to be seen as the consequence of resistances in the aether, but as a present from above, as a concomitant of the circumstance of motion", exactly because n is a universal constant.

At the end, I want to mention the velocities possible from the standpoint of the relativity principle.

Consider expression (24) for p.

The contraction that we observe at a distance moving with system K' is depending on p. Thus it has no meaning to assume that p can become imaginary, i.e., q must always be smaller than c. But what is the meaning of q? q means the velocity of the coordinate system K', thus it cannot be larger than c. In other words: none of the rest coordinate systems can move with superluminal velocity. But we may not see a rest coordinate system only as a mathematical structure, instead we have to think about a material world

with its observers and synchronous clocks. Conversely we assume that we can transform any substantial point to rest. By that it follows that a substantial point cannot move with superluminal velocity.

Now the question arises: Is there a velocity, not of substantial points but of phenomena, that are larger than the speed of light, neglecting phase or group velocities? We have to affirm this question.

Without going into details, for which I refer to my last paper in Ann. d. Phys.[3], I only want to explain this question shortly by an example.

The following can be derived from LORENTZ's transformation equations.

$x_2 - x_1$ mean the distance of two fixed points in system K in the direction of $\mathfrak{c}_0$. This distance is now synchronously measured by the moving observer in K', by which he obtains the distance l'. By that, the two synchronous clocks which were placed by the observer in K' at both ends of l' in order to make a synchronous measurement of $x_2 - x_1$, will indicate a time difference $t_2 - t_1$, equal to:

$$t_2 - t_1 = qn\,(x_2 - x_1), \tag{26}$$

from that if follows

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q} \tag{27}$$

Now we imagine a rod of length l' in K', and assume that the observers in K' would arrange to elevate the rod at the same time (by aid of their synchronous clocks) perpendicular to $\mathfrak{c}_0$. However, this won't happen at the same time for the resting observer, namely it will appear to him as being elevated in the moment at which one end of the rod coincides with x_1, and the other end only then when it coincides with point x_2, thus after the time $t_2 - t_1$ which is calculated from (26). For the resting observer, the bending of the rod propagates with velocity $V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$. From (28) we obtain

$$V = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q} > c \tag{28}$$

since q is always smaller than c, as remarked earlier.

We now consider equation (17), which we can write (because all quantities p, s, p_1 and s_1 are known to us) as follows:

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0 \mathfrak{v} - pq\mathfrak{c}_0}{p(1 - qn\mathfrak{c}_0 \mathfrak{v})} \tag{29}$$

Now we assume that something is moving in the direction of $\mathfrak{c}_0$ with velocity v. Then $\mathfrak{v} = v\mathfrak{c}_0$, and we obtain from (29), when we simultaneously cancel the unit vector $\mathfrak{c}_0$,

$$v' = \frac{v - q}{1 - vqn} \tag{30}$$

From (28) we see, that for us (the resting observer) the bending is moving the quicker, the slower K' is moving with respect to K. If we now imagine that we play the role of the moving observer, then the propagation velocity of the bending will appear to us as infinitely large, because the observers elevate the rod at the *same* time according to *their* synchronous clocks. The same result can also be obtained from (30). There we replace the value of v by V from (28), thus it is given $v' = \infty$.

Thus we can say, in order to characterize the meaning of V more clearer, that V is the velocity which is required in system K in order to catch up the time in system K'.

The existence of velocity

$$V = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q} > c$$

is to be seen as a consequence of the relativity principle, and in particular it is given as the direct consequence of the

concept of synchronous clocks and synchronous measurements.

(Received September 23, 1910.)

Discussion.

SOMMERFELD: The impossibility of superluminal velocities in connection with process velocities is concluded by EINSTEIN from the circumstance, that (as he drastically says) one can telegraph into the past by superluminal velocities. Let's say that this is related to the signal velocity, not the velocity of an arbitrary process. There are without doubt many processes that are allowed to propagate with superluminal velocity in relativity theory as well. For instance, in anomalous dispersing bodies the phase of light propagates with a velocity that can be faster than light. This is certainly not a contradiction against the relativity principle, because one cannot give a signal by a continuous periodic wave train. Recently EINSTEIN has communicated to me another simple example in which there is superluminal velocity as well, but also in this case it's not about a "signal velocity". Imagine two rulers mutually inclined under a very acute angle, then move one of them with a velocity of 1cm/unit against the other one, then the intersection on the other one propagates with arbitrary large velocity. Isn't it

the case that the example of the lecturer has more similarity with this process than with a signal?

LECTURER: Certainly; I didn't call it signal velocity. When we set up two hooks, then (in case we move the rod) the bending will touch the two hooks, and we can measure the velocity of the bending. For the time being I will let it undecided as to whether one can transfer signals by that. I discovered this by my investigations concerning rigid bodies (see Annalen der Physik **33**, 607, 1910), in which the rigid body is treated in accordance with EULER's method. There it is given, that the velocity propagates within a rigid body in its own direction with velocity c^2/v.

SOMMERFELD: I believe that the concept of rigid bodies must be modified in so far, that the reactions in its interior cannot propagate with superluminal velocity.

LECTURER: When we assume BORN's differential equation, then we come to a propagation velocity larger than that of light. We have a volume element that we consider as being rigid. This volume element at its motion, transformed to rest, conserves its form. This is BORN's differential equation. If we keep this condition, then superluminal velocity is given. For the time being we don't know as to how the body will actually move since we can make no statement about the interior forces of the body. BORN's differential equations is only *one* condition which must be satisfied by the motion of rigid bodies.

BORN: I want to add only some words to the remark concerning rigid bodies. Within such a body, every action is indeed propagating momentarily for a co-moving observer, and thus with superluminal velocity for a moving observer. It it were possible to show, that it contradicts the relativity principle by "telegraphing into the past" in this way, then the concept of the rigid body must surely be abandoned. The differential expressions by whose disappearance I have defined rigidity would still be useful, since they are a measure of the deformation of the volume element, so they should provide the foundation for an elasticity theory in accordance with the relativity principle. As to how the "propagation with superluminal velocity" mentioned by the lecturer arises, can be made quite illustrative in MINKOWSKI's representation. I imagine a rod of length l (in the following the speaker is drawing at the table) and lay it parallel to the y-axis; perpendicular to the xy-plane I include time as the third coordinate in order to describe the successive locations of the rod. When the rod is at rest, it will obviously represented by primes lying one above the other in the t-direction, and which can be combined to a plane belt parallel to the yt-plane. If one now gives the rod a motion in the direction of the x-axis, then this results in bending the belt towards the x-direction. If the rod should be at rest again at the end, then the belt will eventually be parallel to the yt-plane again. In order to show now that the process is propagating with superluminal speed, I take a new coordinate system in motion, that is, I introduce

oblique parallel coordinates into our figure in accordance with the Lorentz transformation, at which the t'-axis is inclined against the t-axis and the $x'y'$-plane against the xy-plane. In this system, simultaneous events are represented by planes which are lying obliquely to the old xy-plane. If one intersects the bent sheet previously constructed with such an oblique plane, then the intersection is evidently not straight, but has a bending that is moving to the right when one moves the intersecting plane towards above, that is, it is moving to the right with superluminal velocity. The other example mentioned by V. IGNATOWSKY, concerns the motion denoted by me as hyperbolic motion (the following is again illustrated by a drawing). It will be represented in the xt-plane by a bundle of hyperbolas having line $x = \pm ct$ as their asymptote. It satisfies my differential equations of rigidity and one can easily see, that the points having the same velocity are lying on the line passing through the origin. However, these lines are oblique and their inclination is smaller than that of the line $x = \pm ct$. The place where the velocity q is present, thus propagates with superluminal velocity through the body.

LECTURER: I have wanted to add some words about this matter. EINSTEIN arrives at the following formula (Annalen der Physik **23**, 381, 1907),

$$T = l\frac{1 - Wv/V^2}{W - v}$$

and says, that when W is larger than V (EINSTEIN denoted by V which was denoted by c in this lecture), one can always choose v so that T is smaller than zero, thus T becomes negative. That is, one could telegraph into the past. However, if one sets W equal to V^2/v (c^2/q in this lecture), then the numerator becomes equal to zero here. That is, the velocity becomes infinite for the coordinate system in which the rod is located. Because this velocity (c^2/q) is nothing other than the velocity necessary to catch up the time in the moving coordinate system (in which the rod is located) as seen from our viewpoint (in the resting system). Because if we had a clock moving with this velocity as seen from our viewpoint, then it moves with infinitely large velocity for the coordinate system (in which the rod is located) according to the above; this boils down to the circumstance, that everywhere in the system it is simultaneously present. Thus there is an arbitrary amount of synchronous clocks, from which it follows that this velocity is actually the velocity to catch up the time in the moving system. Thus the value c^2/q is the limiting velocity, at which the numerator of the previous formula becomes zero, thus T equal to O, but not negative. A larger velocity is just not imaginable.

1. ↑ This journal **10**, 104, 1909.
2. ↑ l. c. p. 106.
3. ↑ Vol. 33, 607, 1910.

This work is a translation and has a separate copyright status to the applicable copyright protections of the original content.

Original:

This work is in the **public domain** in the **United States** because it was published before January 1, 1926.

The author died in 1942, so this work is also in the **public domain** in countries and areas where the copyright term is the author's **life plus 75 years or less**. This work may also be in the **public domain** in countries and areas with longer native copyright terms that apply the **rule of the shorter term** to foreign works.

Translation:

This work is released under the Creative Commons

Attribution-ShareAlike 3.0 Unported license, which allows free use, distribution, and creation of derivatives, so long as the license is unchanged and clearly noted, and the original author is attributed.

About this digital edition

This e-book comes from the online library Wikisource[1]. This multilingual digital library, built by volunteers, is committed to developing a free accessible collection of publications of every kind: novels, poems, magazines, letters...

We distribute our books for free, starting from works not copyrighted or published under a free license. You are free to use our e-books for any purpose (including commercial exploitation), under the terms of the Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported[2] license or, at your choice, those of the GNU FDL[3].

Wikisource is constantly looking for new members. During the transcription and proofreading of this book, it's possible that we made some errors. You can report them at this page[4].

The following users contributed to this book:

- D.H
- Bender235
- AzaToth
- Tene~commonswiki
- Bromskloss
- KABALINI

- Waldyrious
- Auralux
- Latebird
- Ö
- Noclip~commonswiki
- Cumulus
- Kyle the hacker
- Abu badali~commonswiki
- Boris23
- Zscout370
- Fleshgrinder
- Petrus Adamus
- MattWade
- Rocket000
- Masur
- Palosirkka
- Mpaa
- PatríciaR

---

1. ↑ https://en.wikisource.org
2. ↑ https://www.creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0
3. ↑ https://www.gnu.org/copyleft/fdl.html
4. ↑ https://en.wikisource.org/wiki/Wikisource:Scriptorium

Über Überlichtgeschwindigkeiten in der Relativitätstheorie

Wladimir Sergejewitsch Ignatowski

S. Hirzel, Leipzig, 1911

Exportiert aus Wikisource am 5. April 2021

Über Überlichtgeschwindigkeiten in der Relativtheorie.

Von *W. v. Ignatowsky*.

Ich habe schon in meinen früheren Arbeiten[1] hingewiesen, daß die Lichtgeschwindigkeit c nur für substantielle Punkte als Grenzgeschwindigkeit betrachtet werden kann. Denn in der Wurzel $\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}$, welche in den *Einstein*schen Transformationsgleichungen eintritt, bedeutet q die Geschwindigkeit des Koordinatensystems. Nun ist ein solches System kein mathematisches Gebilde, sondern eine substantielle Welt mit ihren Beobachtern und ihrem Instrumentarium. Deshalb können wir annehmen, daß wir einen beliebig bewegten *substantiellen* Punkt auf Ruhe transformieren können. Die Bewegung irgendeiner Erscheinung, z. B. Fortpflanzung einer Phase, Dilatation usw., können wir im allgemeinen nicht auf Ruhe transformieren, und kann deshalb diese Fortpflanzung beliebig sein.

Bezeichnet $\mathfrak{v}$ irgendeine Geschwindigkeit im ungestrichenen und $\mathfrak{v}'$ im gestrichenen System, so ist

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v} + (p-1)\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{c}_0\mathfrak{v} - pq\mathfrak{c}_0}{p(1-qn\mathfrak{c}_0\mathfrak{v})}\,[2]. \tag{1}$$

Ist $\mathfrak{v}$ senkrecht zu $\mathfrak{c}_0$ und gleich $\mathfrak{v}_s$, so folgt aus (1)

$$\mathfrak{v}' = \frac{\mathfrak{v}_s - pq\mathfrak{c}_0}{p} \tag{2}$$

und die zu $\mathfrak{c}_0$ senkrechte Komponente von $\mathfrak{v}'$ ist wegen (2) gleich

$$\mathfrak{v}'_s = \frac{\mathfrak{v}_s}{p}. \tag{3}$$

Um alle Verhältnisse klar zu übersehen, wenden wir uns zur graphischen Darstellung und nehmen zur Vereinfachung an, daß $\mathfrak{v}$ parallel zu $\mathfrak{c}_0$ ist. Dasselbe gilt dann auch für $\mathfrak{v}'$. Schreiben wir jetzt v anstatt $\mathfrak{v}$, so folgt dann aus (1)

$$v' = \frac{v - q}{1 - qnv}; \; n = \frac{1}{c^2}. \tag{4}$$

Wir setzen jetzt $v' = y$ und $v = x$ und erhalten dann statt (4)

$$y = \frac{x - q}{1 - qnx}. \tag{5}$$

Um den Nullpunkt zeichnen wir ein Quadrat mit der Seitenlänge $2c$ (Fig. 1). Außerdem führen wir ein zweites Koordinatensystem ein, parallel dem ersten, und welches um das Stück

$$RO_1 = NO_1 = V = \frac{1}{qn} \tag{6}$$

verschoben ist, wobei wir im neuen Koordinatensystem die positiven Abszissen nach links rechnen.

Es werden dann x und y, ausgedrückt in den neuen Koordinaten x_1 und y_1 sein:

(7)

$$\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{q} - x_1 \\ y = y_1 - \dfrac{c^2}{q} \end{cases}$$

Dies in (15) eingesetzt, ergibt:

$$x_1 y_1 = \frac{c^2\left(c^2 - q^2\right)}{q^2}. \tag{8}$$

Wir erhalten demnach eine Hyperbel, deren Asymptoten die neuen Koordinatenachsen sind.

Aus (5) ersehen wir, daß die Hyperbel durch die Punkte D und B des Quadrats gehen wird, d. h. für $v = \pm c$ ist immer $v' = \pm c$. Hat q ein negatives Zeichen, so erhalten wir die Hyperbel $DM'B$. Ist $v' < c$, so wird auch $v < c$ sein und umgekehrt, was im Einklang mit den Ausführungen von *Einstein*[3] ist. Für substantielle Punkte, also in allen Fällen, wo wir auf Ruhe transformieren können, werden wir uns *innerhalb* des Quadrats $ABCD$ bewegen, welches von Hyperbeln für alle möglichen q ausgefüllt wird. Sind z. B. q und v' beide größer als $\frac{c}{2}$, so ist dennoch $v < c$. Dies ersieht man aus der Fig. 1, wo $OK = q_1 > \frac{c}{2}$ und $OP = v'_1 > \frac{c}{2}$ ist. Es wird dann v_1 durch die Abszisse des Punktes S der Hyperbel bestimmt. Bei Vernachlässigung des Relativitätsprinzips (also $n = 0$) geht die Hyperbel in die Grade LK über, und wir hätten dann statt S den Punkt S' erhalten und statt v_1, $OE = v'_1 + q$.

Für $v = \dfrac{1}{nq} = \dfrac{c^2}{q}$ ist $v' = \infty$. Für $v > \dfrac{c^2}{q}$ geht v' von $-\infty$ bis $-\dfrac{c^2}{q}$, welch letzteren Wert es erreicht, falls $v = \infty$ wird. Hierbei bewegt sich $y = v'$ längs dem zweiten Hyperbelast $D_1 B_1$. Bei $v = -\infty$ ist $v' = -\frac{1}{qn} = -\frac{c^2}{q}$ und bewegt

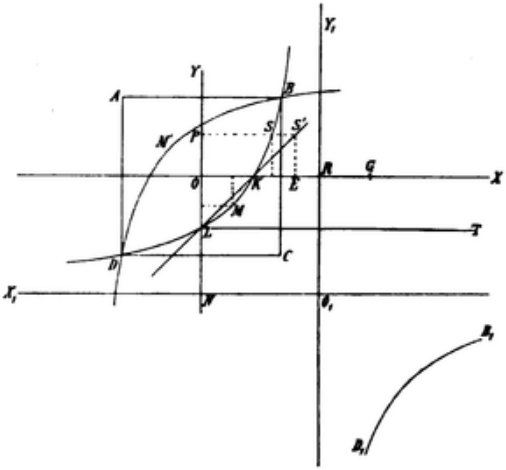


Fig. 1

sich dann längs dem ersten Hyperbelast und gelangt in das Quadrat $ABCD$, sobald $v > -c$ wird.

Für einen Punkt M der Hyperbel ist v dem absoluten Wert nach gleich v', aber von entgegengesetztem Zeichen. D. h. $-v = v'$. Bezeichnen wir diesen Wert von v durch v_0, so folgt aus (4)

$$v_0 = \frac{c^2}{q} - \frac{c^2}{q}\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}} = \frac{1}{qn}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{9}$$

Für $n = 0$ geht v_0 in $\frac{q}{2}$ über in Übereinstimmung mit der klassischen Kinematik.

Es bezeichne α' den Winkel zwischen einer zum bewegten Beobachter festen Linie, und der Richtung von $\mathfrak{c}_0$. Dann ist[4]

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha'}{p\sqrt{1 - nq^2\cos^2\alpha'}}, \tag{10}$$

wo α denselben Winkel für den ruhenden Beobachter bedeutet. Statt (10) können wir auch schreiben

$$\mathrm{tg}\alpha = p\,\mathrm{tg}\alpha'. \tag{11}$$

Ruht umgekehrt die Linie in bezug auf den ruhenden Beobachter und bedeutet α den Winkel zwischen der Linie und $\mathfrak{c}_0$, so ist laut (11)

$$p\,\mathrm{tg}\alpha' = \mathrm{tg}\alpha. \tag{12}$$

Wir gehen nun zu dem von *Sommerfeld* angegebenen Beispiel[5] über und wollen dasselbe näher untersuchen und an Hand desselben alle oben angegebenen Beziehungen zwischen v und v' erläutern.

In dem Beispiel von *Sommerfeld* wird angenommen, daß sich ein Lineal OB (Fig. 2), welches mit der OX-Richtung (d. h. mit der

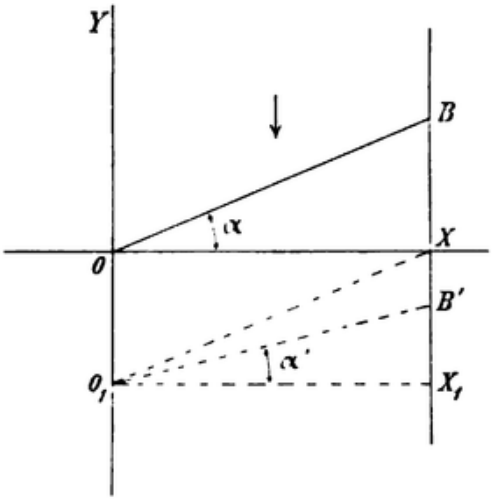


Fig. 2

Richtung von $\mathfrak{c}_0$) einen Winkel α bildet, mit einer konstanten Geschwindigkeit v_s senkrecht zu OX (Richtung des Pfeiles) bewegt. [Der Schnittpunkt zwischen OB und OX bewegt sich dann mit einer Geschwindigkeit

$$s = \frac{v}{\mathrm{tg}\alpha}. \tag{13}$$

Dies alles bezieht sich auf das ruhende System.

Für das bewegte System ist wegen (4)

$$s' = \frac{s - q}{1 - qns}. \tag{14}$$

Der Winkel α für das bewegte System, d. h. α', wird aber nicht mehr durch Gleichung (12) bestimmt, sondern ergibt sich folgendermaßen.

Der Wert der zu $\mathfrak{c}_0$ senkrechten Komponente von v_s ist für den bewegten Beobachter wegen (3) gleich $\frac{v_s}{p}$. Deshalb ist für den letzteren die Geschwindigkeit des Schnittpunktes in bezug auf die für ihre bewegte Achse OX gleich $\frac{v_s}{p\ \mathrm{tg}\alpha'}$ und in bezug auf ihn selbst $\frac{v_s}{p\ \mathrm{tg}\alpha'} - q$. D. h. es ist

$$s' = \frac{v_s}{p\ \mathrm{tg}\alpha'} - q. \tag{15}$$

Aus (13), (14) und (15) erhalten wir demnach

$$\mathrm{tg}\alpha' = p\ \mathrm{tg}\alpha' - v_s pqn. \tag{16}$$

Für $v_s = 0$ geht (16) in (12) über, wie es auch sein muß.

Gleichung (16) läßt sich auch auf einem anderen Wege ableiten.

Die Linie BX ist eine feste in bezug auf das ruhende System. Deshalb ist

$$OX = x = \frac{x'}{p}. \tag{17}$$

Ebenfalls sollen O_1 und X_1 feste Punkte in bezug auf das ruhende System sein und die Entfernung $OO_1 = XX_1$ so gewählt werden, daß $tgXOX = \mathrm{tg}\alpha$. Es ist dann

$$XX_1 = y_1 = OX_1 \mathrm{tg}\alpha = x\ \mathrm{tg}\alpha \tag{18}$$

Und für den bewegten Beobachter ist

$$y' = y_1 = x \operatorname{tg}\alpha. \tag{19}$$

Nach der Zeit t soll der Stab für den ruhenden Beobachter die Lage O_1X haben. Für den bewegten Beobachter wird im Moment t' der Punkt O in O_1 liegen, aber der Punkt B wird für ihn im selben Moment nicht in X, sondern in B' liegen. Deshalb ist für den bewegten Beobachter $\alpha' = B'O_1X_1$. Der Punkt B liegt in X für den bewegten Beobachter im Moment t'_1. Die Zeitdifferenz $t'_1 - t'$ ist

$$t'_1 - t' = pqnx, \tag{20}$$

und da die zu $\mathfrak{c}_0$ senkrechte Komponente der Geschwindigkeit des Stabes für den bewegten Beobachter gleich $\frac{v_s}{p}$ ist, so berechnet sich die Strecke XB' zu

$$(t' = t'_1)\,\frac{v_s}{p} = v_s qnx, \tag{21}$$

und deshalb

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{B'X_1}{x'} = \frac{y'_1 - XB'}{x'} = \frac{x \operatorname{tg}\alpha - v_s qnx}{x'} = p \operatorname{tg}\alpha - v_s qqn \tag{22}$$

in Übereinstimmung mit (16).

Ist die rechte Seite von (22) gleich Null, also auch $\alpha' = 0$, d. h.

$$\operatorname{tg}\alpha = v_s qn \tag{23}$$

und demnach

$$s = \frac{1}{qn} = \frac{c^2}{q}, \tag{24}$$

so ist für den bewegten Beobachter der Stab parallel zu $\mathfrak{c}_0$, also für diesen Beobachter bewegt sich der Schnittpunkt mit unendlich großer Geschwindigkeit. Verkleinern wir α, so vergrößert sich s, und s' wird laut (14) negativ, und zwar ändert es sich von ∞ bis $-\frac{1}{qn}$, falls s sich von $\frac{1}{qn}$zu $+\infty$ bewegt. Für $s = -\infty$ bis $s = -c$, geht s' von $-\dfrac{1}{qn}$ bis zu dem Wert $s' = -c$. Alles dies läßt sich auf der Fig. 1 übersehen, wie wir dies eben ausgeführt haben.

Wir nehmen nun an, α habe einen Wert $\alpha_0 > 0$, der kleiner ist als der Gleichung (23) entspricht. Dann ist, wegen (22), $\alpha'_0 < 0$. D. h. während sich für den ruhenden Beobachter der Schnittpunkt von links nach rechts bewegt, wird sich derselbe Schnittpunkt für den bewegten Beobachter von rechts nach links bewegen, weil in dem angenommenen Fall eben $\alpha'_0 < 0$ ist. Würde das Lineal ruhen, mit demselben Winkel $\alpha_0 > 0$, so würde auch, wie aus (12) folgt, $\alpha'_0 > 0$ sein. Bei dem Übergang von Ruhe zur konstanten Bewegung geht α'_0 von einem positiven zu einem negativen Wert über. Dies erklärt sich folgendermaßen. Bei dem genannten Übergang wird das Lineal für den bewegten Beobachter einen Knick[6] aufweisen, der sich für diesen Beobachter von rechts nach links bewegen wird, weshalb für letzteren das linke Ende sich später zu bewegen anfangen wird. Bei Abwesenheit des Relativitätsprinzips ($n = 0$), würde bei einem beliebigen $\alpha'_0 > 0$ auch stets $\alpha'_0 >$ sein.

Bekanntlich kann sich ein Signal nicht mit Überlichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Wir wollen, anknüpfend an die Fig. 1, hierfür einen elementaren Beweis anführen.

Es seien A und B zwei zum ruhenden System feste Punkte auf der X-Achse. Die Richtung von A zu B ist positiv in der Richtung der X-Achse. Von A werde ein Signal mit der Geschwindigkeit V nach B gesandt, welches dort eine Wirkung auslösen soll. Wir ziehen durch L (Fig. 1) eine zu OX parallele Gerade LT und betrachten dieselbe als neue Abszissenachse. Die Abschnitte der entsprechenden Ordinaten zwischen LT und der Hyperbel geben uns die Relativgeschwindigkeit V_1 des Signals in bezug auf die Strecke AB, *von bewegtem Beobachter aus beurteilt*. Ist $V < c$, so wird, wie aus der Figur ersichlich, V_1 stets positiv sein, das heißt, es wird in diesem Fall, von einem beliebigen System aus beurteilt, das Signal in B zu einer späteren Zeit ankommen, als es von A abgesandt worden ist. Ist $V > c$, z. B. $V = OG$, so können wir zwischen G und dem Quadrat immer ein Koordinatensystem $X_1 O_1 Y_1$ einschalten und dann nach (6) $q < c$ berechnen. Für den Beobachter, welcher sich mit dieser Geschwindigkeit q bewegt, wird $V_1 < 0$ sein, da hierbei der zweite Ast $D_1 B_1$ der Hyperbel zu berücksichtigen ist. Es wird also hierbei für den bewegten Beobachter das Signal in B *früher* eintreffen, als es von A abgegangen ist. Hieraus schließen wir in bekannter Weise, daß ein Signal sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen kann.

Berlin, im Juli 1911.

(Eingegangen 1. August 1911.)

1. ↑ Ann. d. Phys. 33, 607, 1910, diese Zeitschr. 11, 972. 1910 und Archiv der Mathematik und Physik III. Reihe. 17, 1 und 18, 17.

2. ↑ *v. Ignatowsky*, diese Zeitschr. 12, 164, 1911.
3. ↑ *Einstein*, Ann. d. Phys. 17, 891, 1905.
4. ↑ *v. Ignatowsky*, Archiv d. Mathematik und Physik, III. Reihe, 18, 17.
5. ↑ Siehe die Diskussion zu meinem Königsberger Vortrag, diese Zeitschr. 11, 972, 1910.
6. ↑ *v. Ignatowsky*, diese Zeitschr. **12**, 414, 1911 und Ann. d. Phys. **38**, 607, 1910.

Über diese digitale Edition

Dieses E-Book wurde aus dem Bestand der freien Quellensammlung Wikisource, einem Schwesterprojekt der Wikipedia, erstellt. Dieses mehrsprachige Projekt, dient dem Aufbau einer Bibliothek mit frei verfügbaren Inhalten und wird ausschließlich von Freiwilligen betrieben. Wikisource umfasst eine Vielzahl von Texten: Romane, Gedichte, wissenschaftliche Aufsätze, Reportagen, Gesetze, Zeitungen und Zeitschriften und vieles mehr.

Alle Werke bei Wikisource sind entweder gemeinfrei oder stehen unter einer freien Lizenz. Sie können dieses E-Book für jeden Zweck, auch kommerzielle, verwenden und beliebig weitergeben. Im Falle, dass der Text unter einer freien Lizenz steht, sind zusätzlich die entsprechenden Lizenzbedingungen zu beachten.

Wikisource ist immer auf der Suche nach neuen Mitarbeitern. Wenn Sie Interesse an einer Mitarbeit haben, finden Sie einführenden Informationen auf der Hauptseite von Wikisource.

Bei der Erstellung des Textes kann es leider zu Fehlern kommen. Wenn Sie einen solchen finden, bitten wir um entsprechende Informationen auf dieser Wikisource-Seite oder per E-Mail an ebook@wikisource.de.

Getting the Lorentz transformations without requiring an invariant speed

Andrea Pelissetto* and Massimo Testa†
Dipartimento di Fisica,
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
and INFN – Sezione di Roma I
Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy
(Dated: April 10, 2015)

The structure of the Lorentz transformations follows purely from the absence of privileged inertial reference frames and the group structure (closure under composition) of the transformations—two assumptions that are simple and physically necessary. The existence of an invariant speed is *not* a necessary assumption, and in fact is a consequence of the principle of relativity (though the finite value of this speed must, of course, be obtained from experiment). Von Ignatowsky derived this result in 1911, but it is still not widely known and is absent from most textbooks. Here we present a completely elementary proof of the result, suitable for use in an introductory course in special relativity.

arXiv:1504.02423v1 [gr-qc] 8 Apr 2015

I. INTRODUCTION

In standard textbooks, the Lorentz transformation equations, which connect inertial reference frames, are deduced from the invariance of the speed of light, which implies the invariance of the Minkowski interval.[1] A different approach, however, was followed by von Ignatowsky.[2] Only six years after the formulation of special relativity, he proved that the Lorentz transformations arise under quite general conditions, without assuming *a priori* the existence of an invariant speed. Von Ignatowsky showed that the only admissible transformations consistent with the principle of inertia, the isotropy of space, the absence of preferred inertial frames, and a group structure (i.e., closure under composition), are the Lorentz transformations, in which c can be any velocity scale, or the Galilei transformations. This surprising result shows that the Lorentz transformations are not directly related to the properties of electromagnetic radiation. Electromagnetism is only relevant, if present within the theory, as a way to fix the arbitrary velocity scale, which is then identified with the speed of light. This deep and fascinating result, although well known in the specialized literature,[3–11] is not commonly found in textbooks,[12] because its usual proof is rather complicated and uninspiring. It is the purpose of the present paper to present a derivation of the von Ignatowsky result using elementary considerations which, in our opinion, shed new light on the result.

II. NOTATION FOR TRANSFORMATIONS BETWEEN FRAMES

We wish to characterize the transformations that relate two different inertial frames. Let us consider two inertial observers $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}'$. Let $\mathbf{r} = (x, y, z)$ and t be space and time coordinates for $\mathcal{O}$ and $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ and t' be the corresponding quantities for $\mathcal{O}'$.

In order to simplify the argument, we will restrict our considerations to the subgroup of transformations involving x and t only, setting $y' = y$ and $z' = z$. This is equivalent to choosing coordinates so that $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}'$ are in relative motion along the x and x' direction.[13]

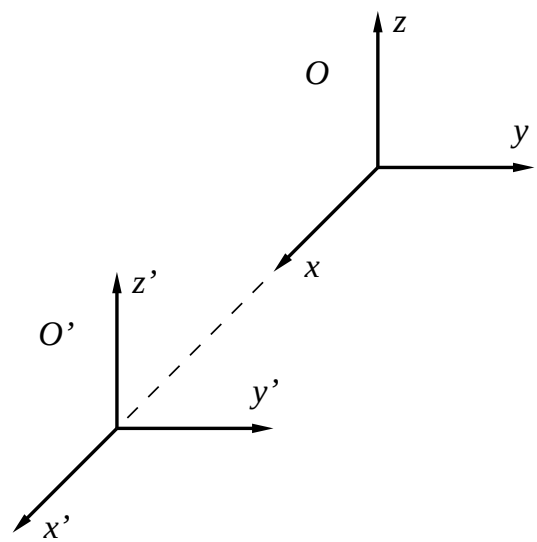


FIG. 1. Two inertial frames in relative motion along the x-axis.

We assume the validity of the principle of inertia: in an inertial frame free particles undergo rectilinear motion with constant speed. Therefore, if the trajectory of a particle is a straight line in the frame of observer $\mathcal{O}$ and its speed is constant, the trajectory is also a straight line in the frame of observer $\mathcal{O}'$ and also the speed in the new frame is constant. This condition implies[14] that the two inertial frames are related by a *linear* transformation. We can therefore write

$$x^{0\prime} = Ax^0 + Bx, \tag{1}$$
$$x' = Cx^0 + Dx, \tag{2}$$

where we have defined the time coordinates x^0 and $x^{0\prime}$, measured in units of distance, as

$$x^0 = \bar{v}t, \tag{3}$$

where $\bar{v}$ is an *arbitrary* constant with units of speed. The inverse transformation follows immediately:

$$x^0 = \frac{1}{\Delta}(Dx^{0\prime} - Bx'), \tag{4}$$

$$x = \frac{1}{\Delta}(-Cx^{0\prime} + Ax'), \tag{5}$$

with

$$\Delta \equiv AD - BC \neq 0. \tag{6}$$

It is useful to rewrite the transformation in matrix notation, introducing

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{7}$$

and its inverse

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Then, we have

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix} \tag{9}$$

and

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x' \end{pmatrix}. \tag{10}$$

III. EQUIVALENCE OF INERTIAL REFERENCE FRAMES

The main ingredient in the proof is the requirement that there are no privileged frames: all inertial frames are equivalent. We wish now to express this hypothesis in a more transparent way that allows us to put constraints on the matrix Λ.

Let us consider two events, E_1 and E_2, at the same spatial location in frame $\mathcal{O}$, but separated by a time difference τ. In $\mathcal{O}'$ the two events are separated by a time lapse T'. One natural requirement is that if we consider two different events, E_3 and E_4, that are at the same spatial location in frame $\mathcal{O}'$, but separated by the same time difference τ in $\mathcal{O}'$, then these two events are separated by a time lapse $T = T'$ in $\mathcal{O}$. Similarly, we require that if observer $\mathcal{O}$ measures the length l (along the x axis) of a rod that is at rest with respect to $\mathcal{O}'$ and has length l_0 in the $\mathcal{O}'$ frame, the same result is obtained by $\mathcal{O}'$ for an identical rod at rest with respect to $\mathcal{O}$, always along the x axis. These requirements constrain the coefficients of the transformation Λ.

Let us consider the two events E_1 and E_2 at the same spatial location in frame $\mathcal{O}$, separated in time by τ. From Eq. (1), observer $\mathcal{O}'$ measures a time lapse T' given by

$$T' = A\tau. \tag{11}$$

Consider now the complementary situation in which an identical clock, at rest with respect to $\mathcal{O}'$, measures the same time interval τ between two events E_3 and E_4 that are at the same location in $\mathcal{O}'$. Correspondingly, from Eq. (4), the observer $\mathcal{O}$ measures a time lapse T given by

$$T = \frac{D}{\Delta}\tau. \tag{12}$$

As stated above, if neither $\mathcal{O}$ nor $\mathcal{O}'$ is in some way privileged, the two time intervals T and T' should be identical, i.e., $T' = T$, which implies

$$A = \frac{D}{\Delta}. \tag{13}$$

A similar argument applies in the case of a rod of rest length l_0, oriented along the x axis. If the rod is at rest with respect to $\mathcal{O}'$, Eq. (2) implies that the length l measured by observer $\mathcal{O}$ satisfies

$$l_0 = Dl. \tag{14}$$

Analogously, for a rod at rest in $\mathcal{O}$, we have, from Eq. (5), that the length l' measured by $\mathcal{O}'$ satisfies

$$l_0 = \frac{A}{\Delta}l'. \tag{15}$$

Again, the absence of privileged reference frames requires that $l = l'$ and therefore

$$\frac{A}{\Delta} = D. \tag{16}$$

Combining Eqs. (13) and (16), we have

$$\frac{A}{\Delta^2} = A. \tag{17}$$

The solution $A = 0$ is not acceptable on physical grounds, because it would lead to the meaningless result $x^{0\prime} = Bx$, so we are forced to choose

$$|\Delta| = 1. \tag{18}$$

If we restrict ourselves to proper transformations, we have simply

$$\Delta = 1, \tag{19}$$

so that

$$A = D. \tag{20}$$

These conditions imply that the transformation relating two different inertial frames is of the form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}, \tag{21}$$

with

$$A^2 - BC = 1, \tag{22}$$

the latter condition being a consequence of Eq. (19).

IV. GROUP STRUCTURE

To further constrain the structure of the matrix Λ, we now add the natural requirement that the transformations connecting two inertial frames constitute a group, i.e., that the combination of two such transformations yields a third transformation of the same form.

We consider two transformations,

$$\Lambda_1 \equiv \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & A_1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2 \equiv \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

and their product,

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 \Lambda_2 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 A_2 \\ C_1 A_2 + A_1 C_2 & A_1 A_2 + C_1 B_2 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

The matrix Λ_3 is an element of the set of admissible matrices only if its diagonal elements are equal [see Eq. (21)], that is, if

$$B_1 C_2 = C_1 B_2. \tag{25}$$

In order to satisfy Eq. (25) for *all* transformations of the form (23), we have three different possibilities:

(i) $B = \alpha C$, where α is a nonzero constant;

(ii) $B = 0$ and $A = 1$, where the second equation follows from Eq. (22); or

(iii) $C = 0$ and $A = 1$.

Case (iii) is easily recognized to be physically uninteresting.

Case (ii) corresponds to the Galilean transformations:

$$x^{0\prime} = x^0, \tag{26}$$

$$x' = C x^0 + x, \tag{27}$$

the parameter C being the relative velocity of the two frames in units of $\bar{v}$.

In case (i) we change the definition of x_0 in Eq. (3) introducing

$$\tilde{x}^0 = \bar{c} t = \frac{\bar{c}}{\bar{v}} x^0 \tag{28}$$

with

$$\bar{c} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{|\alpha|}}. \tag{29}$$

Then we obtain

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^{0\prime} \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \frac{\alpha}{|\alpha|} C' \\ C' & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ x \end{pmatrix}, \tag{30}$$

where

$$C' = C\sqrt{|\alpha|}. \tag{31}$$

Eq. (22) becomes now

$$A^2 - \frac{\alpha}{|\alpha|} C'^2 = 1. \tag{32}$$

If α is negative, then Λ is an orthogonal rotation matrix. In this case, there are transformations Λ such that Λ^n is close to the identity for some value of n, and this is clearly unphysical. Therefore, we can exclude this possibility and we are left with transformations of the form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & C' \\ C' & A \end{pmatrix}, \tag{33}$$

where $A^2 - C'^2 = 1$. In this case the observer $\mathcal{O}'$ moves with speed w with respect to observer $\mathcal{O}$, where w is determined by

$$C'/A = w/\bar{c}. \tag{34}$$

The condition $A^2 - C'^2 = 1$, implies

$$A = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/\bar{c}^2}} \tag{35}$$

$$C' = \gamma w/\bar{c} \tag{36}$$

so that Λ is a generic Lorentz transformation, with the speed of light identified with $\bar{c}$.

V. CONCLUSIONS

Lorentz and Galilei transformations are the only structures compatible with the principles of inertia and relativity, i.e., the nonexistence of privileged reference frames. This result, which is easily stated, is usually obtained by means of rather complicated proofs. In this paper we have presented an elementary derivation, suitable for presentation in undergraduate courses in special relativity.

* andrea.pelissetto@roma1.infn.it
† massimo.testa@roma1.infn.it

[1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, third edition (Wiley, New York, 1998).
[2] W. von Ignatowsky, "Das Relativitätsprinzip," Archiv der Mathematik und Physik **17**, 1–24 (1911).
[3] H. Bacry and J. M. Lévy-Leblond, "Possible kinematics," J. Math. Phys. **9**, 1605–1614 (1968).

[4] V. Berzi and V. Gorini, "Reciprocity principle and the Lorentz transformations," J. Math. Phys. **10**, 1518–1524 (1969).

[5] J. M. Lévy-Leblond, "One more derivation of the Lorentz transformation," Am. J. Phys. **44**, 271–277 (1976).

[6] J. M. Levy-Leblond and J. P. Provost, "Additivity, rapidity, relativity," Am. J. Phys. **47**, 1045–1049 (1979).

[7] D. Mermin, "Relativity without light," Am. J. Phys. **52**, 119–124 (1984).

[8] R. Torretti, *Relativity and Geometry* (Dover, New York, 1996).

[9] S. Liberati, S. Sonego, and M. Visser, "Faster-than-c Signals, Special Relativity, and Causality," Ann. Phys. **298**, 167–185 (2002).

[10] S. Sonego and M. Pin, "Foundations of anisotropic relativistic mechanics," J. Math. Phys. **50**, 042902 (2009).

[11] V. Baccetti, K. Tate, and M. Visser, "Inertial frames without the relativity principle: breaking Lorentz invariance," in *Proc. of the Thirteenth Marcel Grossmann Meeting, Stockholm, Sweden*, 1–7 July, 2012, ed. by K. Rosquist, R. T. Jantzen, and R. Ruffini (World Scientific, Singapore, 2015) in press. Also available as arXiv:1302.5989 [gr-qc].

[12] For a review and a complete set of references, see S. Liberati, *Tests of Lorentz invariance: a 2013 update*, arXiv:1304.5795 [gr-qc].

[13] In other words we are considering systems in motion along the x axis: we assume that the most general transformation can be obtained by combining a boost along the x axis with a pair of independent orthogonal transformations, i.e., rotations, in the two reference frames $\mathcal{O}$ and $\mathcal{O}'$.

[14] L. J. Eisenberg, "Necessity of the linearity of relativistic transformations between inertial systems," Am. J. Phys. **35**, 649–649 (1967).

Prepared for submission to JHEP

arXiv:1112.1466v3 [gr-qc] 26 Apr 2012

Inertial frames without the relativity principle

Valentina Baccetti, Kyle Tate, and **Matt Visser**

School of Mathematics, Statistics, and Operations Research,
Victoria University of Wellington, PO Box 600, Wellington 6140, New Zealand
E-mail: valentina.baccetti@msor.vuw.ac.nz,
kyle.tate@msor.vuw.ac.nz, matt.visser@msor.vuw.ac.nz

Abstract: Ever since the work of von Ignatowsky circa 1910 it has been known (if not always widely appreciated) that the relativity principle, combined with the basic and fundamental physical assumptions of locality, linearity, and isotropy, leads almost uniquely to either the Lorentz transformations of special relativity or to Galileo's transformations of classical Newtonian mechanics. Consequently, if one wishes (for whatever reason) to entertain the possibility of Lorentz symmetry breaking within the context of the class of local physical theories, then it seems likely that one will have to abandon (or at the very least grossly modify) the relativity principle.

Working within the framework of local physics, we reassess the notion of space-time transformations between inertial frames in the absence of the relativity principle, arguing that significant and nontrivial physics can still be extracted as long as the transformations are at least linear. An interesting technical aspect of the analysis is that the transformations now form a *groupoid/pseudo-group* — it is this technical point that permits one to evade the von Ignatowsky argument.

Even in the absence of a relativity principle we can (assuming locality and linearity) nevertheless deduce clear and compelling rules for the transformation of space and time, rules for the composition of 3-velocities, and rules for the transformation of energy and momentum. Within this framework, the energy-momentum transformations are in general *affine*, but may be *chosen* to be linear, with the 4-component vector $P = (E, -\boldsymbol{p}^T)$ transforming as a row vector, while the 4-component vector of space-time position $X = (t, \boldsymbol{x}^T)^T$ transforms as a column vector.

As part of the analysis we identify two particularly elegant and physically compelling models implementing "minimalist" violations of Lorentz invariance — in the first of these minimalist models all Lorentz violations are confined to carefully delineated particle physics sub-sectors, while the second minimalist Lorentz-violating model depends on one free function of absolute velocity, but otherwise preserves as much as possible of standard Lorentz invariant physics.
7 December 2011; 12 December 2011; 28 March 2012; LaTeX-ed March 14, 2018

Keywords: Inertial frames, locality, relativity principle, isotropy, kinematics without relativity, Lorentz symmetry breaking; arXiv:1112.1466 [gr-qc].

Contents

1 Introduction **1**

2 Why violate Lorentz invariance? **3**
- 2.1 Theoretical considerations 3
- 2.2 Phenomenological considerations 3
- 2.3 Experimental considerations 4
- 2.4 DSR? 4
- 2.5 Relative locality? 5
- 2.6 Pragmatic considerations 5
- 2.7 Summary 6

3 General transformations between inertial frames **6**
- 3.1 Definition of an inertial frame 6
- 3.2 Argument for linearity 7
- 3.3 General representation of inertial transformations 8
- 3.4 Aether frame and moving frame 9
- 3.5 Transformation of 3-velocity 11
- 3.6 Groupoid/pseudogroup structure 12

4 Transformations of energy and momentum **14**
- 4.1 Defining energy and momentum 14
- 4.2 Affine versus linear transformations 15
- 4.3 Summary 18

5 Examples **18**
- 5.1 Galileo group (affine version) 18
- 5.2 Lorentz group (linear version) 20
- 5.3 Lorentz group (affine version) 21
- 5.4 Galileo group (linear version) 22
- 5.5 Summary 23

6 On-shell energy-momentum relations **24**
- 6.1 Rest energy without the relativity principle 24
- 6.2 Invariant rest energy without the relativity principle 26
- 6.3 First minimalist Lorentz-violating model 26
- 6.4 Summary 28

7 Adding more constraints **28**
7.1 Linearity plus isotropy 28
7.2 Linearity plus isotropy plus reciprocity 31
7.3 Second minimalist Lorentz-violating model 33
7.4 Linearity plus isotropy plus reciprocity plus relativity 34

8 Conclusions **36**

A Some matrix identities **37**

B Consistency of dynamics and kinematics **38**

---

1 Introduction

In 1910 von Ignatowsky established a very tight connection between the group structure implied by the relativity principle and the rules for the transformation of space-time coordinates [1–4]. Under suitable hypotheses, (explicitly: locality, linearity, isotropy), the relativity principle almost uniquely leads to either the Lorentz transformations or Galileo's transformations, and this result makes no *a priori* appeal to the constancy of the speed of light. Over the last century this same result has been repeatedly rediscovered, expanded upon, and re-analyzed, with significant pedagogical efforts being expended; see for instance [5–25]. The relevance of von Ignatowsky's analysis for our current purposes comes from reversing the logic: If for whatever reason one wishes to speculate about a possible breakdown of Lorentz invariance at ultra-high energies, then as long as one continues to work within the framework of classical local physics one is almost certain to be forced to abandon (or at the very least grossly modify) the relativity principle — and in particular one will in general be forced to abandon the group structure for the set of transformations that connect space and time in one inertial frame to space and time in a different inertial frame.

This is the basic theme of this article: *Within the framework of local physics, what happens to inertial frames, and the transformations between inertial frames, if you do not have the relativity principle?* We shall see that quite a lot can still be said. Under suitable hypotheses, it is possible to argue that the (space and time) transformation rules between inertial frames should at least be linear. (We shall subsequently have a few words to say about situations where these transformations might not be linear.) For linear transformations between inertial frames, rather general formulae for the

transformation of 3-velocities, and in particular the composition of 3-velocities, can then be derived.

We shall see that in local linear theories with a preferred frame (an "aether") the set of transformations between inertial frames forms a *groupoid/pseudogroup*. (In this particular sub-branch of mathematics the mathematical terminology is not 100% settled.) This *groupoid/pseudogroup* structure is not just a mathematical curiosity, the distinction between a *groupoid/pseudogroup* and a *group* is essential to evading von Ignatowsky's 1910 argument.

In reference [25] one of the current authors had, with collaborators, explored the possibility of, in certain circumstances, permitting "faster than light" signals while still retaining the relativity principle, (and locality and linearity, but not isotropy). In the current article we shall instead more radically explore what happens if it is the relativity principle that is sacrificed.

Now, "merely" knowing how space and time transform is not sufficient to do anything beyond the most basic of kinematics. A key ingredient to understanding physics beyond kinematics is to have some notion of dynamics. To do so requires one (at an absolute minimum) to develop some sort of notion of energy and momentum — thereby implying the ability to construct some sort of Lagrangian or Hamiltonian mechanics. Specifically, to understand dynamics in Lorentz violating theories it is necessary to understand how energy and momentum transform, and to understand how the Lagrangian and Hamiltonian transform. This is more subtle than one might naively expect. In local theories with linear transformations between inertial frames, the generic situation is that energy and momentum transform in an *affine* manner (that is, linear plus an inhomogeneous offset term).

We shall show that it is possible, but not always desirable, to choose conventions and parameters in such a way as to force the offset to be zero — in which case energy and momentum transform in a homogeneous linear manner. In fact, if this is done, then with our conventions the 4-component vector $P = (E, -\boldsymbol{p}^T)$, the 4-momentum, is a row vector. P is an element of the vector space dual to the 4-component vector $X = (t, \boldsymbol{x}^T)^T$, the 4-position, which is a column vector. (We shall see that the offset term in the affine transformation is needed if one wishes to recover the usual naive form of Newtonian mechanics in a suitable limit, but that there is a somewhat non-standard formulation of Newtonian mechanics in which energy-momentum can be made to transform linearly.)

Finally, as a side effect of the general analysis, we focus specific attention on two particularly elegant and compelling models implementing a "minimalist" violation of Lorentz invariance. The first minimalist Lorentz-violating model confines all Lorentz violating physics to some suitable sub-sector of the particle physics spectrum (most

typically taken to be the neutrino sector). The second minimalist Lorentz-violating model preserves as much as possible of standard Lorentz invariant physics, but the transformations additionally depend on one extra function, an arbitrary free function of absolute velocity. Consequently, when studying possible violations of Lorentz invariance, these two models in many ways serve as examples of "least-damage" violations of Lorentz invariance. Indeed, the considerations of this article will be essential to almost any form of violation of Lorentz invariance that respects locality and encodes "preferred frame" (aether frame) effects.

2 Why violate Lorentz invariance?

Why is there currently such significant interest in the possibility of broken Lorentz invariance? There are several reasons, based on a variety of considerations. There are purely theoretical speculations, there is the very practical and pragmatic need for a phenomenological framework within which to formulate empirical tests of Lorentz invariance, and there are even some rather *tentative* experimental hints of the observation of violations of Lorentz invariance.

2.1 Theoretical considerations

There have been numerous and long-standing theoretical suggestions to the effect that quantum gravity might eventually violate Lorentz invariance at ultra-high energies. For instance, there is the string-inspired theoretical framework for characterizing possible violations of Lorentz invariance developed by Kostelecky and collaborators [26–34]. More recently, the Horava gravity framework [35] naturally includes Lorentz violation [36–41]. The "analogue spacetime" programme also very naturally leads to models where Lorentz invariance is violated at one level or another [42–45]. There is also the flat-space non-gravity framework developed by Anselmi [46–58], where Lorentz invariance breaking is used to partially regulate QFT ultraviolet divergences. Further afield, Nielsen and collaborators have studied the renormalization group flow of Lorentz symmetry violating operators in generic QFTs, demonstrating that Lorentz invariance is often an infrared fixed point of a generic Lorentz violating QFT [59–63]. That is, there is an already vast literature regarding possible violations of Lorentz symmetry, and we have necessarily had to be rather selective in choosing citations.

2.2 Phenomenological considerations

If one wishes to observationally test Lorentz invariance one needs some coherent framework to work in that at least allows one to formulate appropriate questions. Over the

last decade significant progress along these lines has been made. See for instance work by Coleman and Glashow [64, 65], Amelino-Camelia, Ellis, Mavromatos, Nanoplous, and Sarkar [66], Gambini and Pullin [67], Kifune [68], Aloisi, Blasi, Ghia, and Grillo [69], Amelino-Camelia and Piran [70], plus that by Jacobson, Liberati, and Mattingly [71–80], and especially the Living Review by Mattingly [81]. The net result of all these efforts is that we now have a considerable quantity of observational bounds, some of them very stringent observational bounds, constraining the possibility of Lorentz symmetry breaking — although it should perhaps be noted that these analyses are typically performed in the preferred (aether) frame.

2.3 Experimental considerations

The OPERA experiment has recently announced rather *tentative* but statistically significant evidence for Lorentz symmetry violation in the form of "faster than light" neutrinos [82]. (See also earlier even more tentative results from the MINOS collaboration [83].) In the resulting firestorm, over 330 theoretical articles have been generated in some 6 months. Notable contributions include [84–104]. We particularly wish to emphasise the importance of the experimental/observational bounds presented in the Cohen–Glashow [87] and Maccione–Liberati–Mattingly articles [101]. The consensus opinion now seems to be that the specific observations reported by OPERA were contaminated by significant experimental errors, and that their tentative observations are ruled out by newer results [105], but the episode has nevertheless inspired significant interest in Lorentz-violating phenomenological models. While our own interest in these issues was in many ways OPERA-MINOS-inspired, we emphasise that our analysis and conclusions as presented in this article are in no way specifically OPERA-MINOS-dependent.

2.4 DSR?

Regarding the possibility of working with DSR (doubly special relativity, distorted special relativity), it will soon become clear that DSR falls outside our framework. (For general background see [106–110].) For DSR-like models a key issue is that after a decade of work on this topic, and despite significant ongoing efforts, there is still no clear universally accepted consensus as to how space and time transform between inertial frames [111–129] — there is not even any clear consensus on whether or not photon velocities are momentum-dependent in general DSR frameworks [130, 131]. There are also suggestions to the effect that the "D" in DSR should be attributed to adopting a modified theory of measurment [110].

However, there *is* reasonable consensus that the energy-momentum transformations of DSR-like theories are generically of the form [109]

$$P \to \bar{P} = f(Lf^{-1}(P)), \tag{2.1}$$

for L an ordinary linear Lorentz transformation and $f(P)$ some nonlinear function on energy-momentum space. Since these energy-momentum transformations are *not* affine, the considerations of this article imply that DSR-like theories (insofar as they are internally consistent), must at the very least exhibit other oddities — such as a breakdown in locality, or a breakdown in linearity, (which we shall soon see implies a breakdown in the usual notion of inertial frame), or a breakdown of the existence of any notion of Hamiltonian/Lagrangian mechanics — any of which would then undermine the very notions of energy and momentum used to define the DSR energy-momentum transformations in the first place.

2.5 Relative locality?

Additionally, there have recently been some speculations (and some significant disagreements) in the literature regarding non-local models based on so-called "relative locality" [132–137]. Currently, these models are still being developed and investigated. Certainly, they very explicitly fall outside the framework we are considering in this article.

Roughly speaking, in relative locality models it is momentum space that is taken to be primary, with single-particle phase space being the tangent bundle to momentum space — the various tangent spaces [indexed by the 4-momentum] then correspond to logically distinct spacetimes indexed by the 4-momentum of the particle being observed. More generally, in multi-particle contexts these relative locality models appear to generalize/modify the notion of inertial frame in such a way that it depends not only on the state of motion of the observer, but also on the collection of 4-momenta of the various objects being observed.

2.6 Pragmatic considerations

There is an experimental adage to the effect that one should "only adjust one parameter at a time" — the theorist's equivalent is that one should "only adjust one theoretical assumption at a time". Controlled restraint in relaxing one's input assumptions is essential if one is to isolate exactly *which* theoretical aspect is critical to *which* phenomenological result.

There is a trade-off between generality and precision. A framework that is too abstract and flexible has difficulty making any precise or definite predictions. Controlled

restraint in relaxing one's input assumptions is essential if one is to develop a pragmatically useful framework that is sufficiently well-defined to make definite statements that can in principle be confronted with empirical reality.

2.7 Summary

Given this level of interest in the topic, we have feel that it is interesting, useful, and timely to perform a careful analysis of the general and very basic notion of inertial frames in the *absence* of Lorentz invariance. We shall focus particularly on "preferred frame" (aether) versions of Lorentz symmetry breaking — that is, we shall study inertial frames in the *absence* of the relativity principle, but while retaining usual notions of local physics.

3 General transformations between inertial frames

3.1 Definition of an inertial frame

Essentially everyone would agree on this characterization of inertial frames:

- All inertial frames are in a state of constant, rectilinear motion with respect to one another; they are not accelerating (in the sense of proper acceleration that would be detected by an accelerometer).
- In an inertial reference frame, the laws of mechanics take their simplest form.
- In an inertial frame, Newton's first law (the law of inertia) is satisfied: Any free motion has a constant magnitude and direction, implying a linear relationship between the space and time coordinates assigned to any free particle.

If *in addition* you accept the relativity principle, then:

- Physical laws take the same form in all inertial frames.

But, as we have argued above, for some purposes the relativity principle is overkill. And that is the topic we will now explore.

An implicit assumption in this discussion is that the space and time coordinates are specified in terms of real numbers — this is a purely pragmatic decision based on the very well-developed theories of differential and integral calculus (and ODEs and PDEs) which are available for the real number system, but which are much more limited for other mathematical frameworks. If we wish to investigate dynamics, or even non-trivial kinematics, we had better be able to at least differentiate (and anti-differentiate) — which immediately forces us to focus attention on the real numbers.

(A much more radical proposal would be to discard all notions of differentiability and integrability completely, and to base all fundamental physics directly on finite-difference equations. There are real and significant costs to any such proposal, notably with regard to existence and uniqueness of solutions to finite-difference dynamical equations, and we will not further explore that particular option.)

3.2 Argument for linearity

Even in the absence of the relativity principle, we shall still want the transformations between inertial frames to be linear. By definition a freely moving particle, in an inertial frame, is not accelerating

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = 0; \qquad \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 t. \tag{3.1}$$

In any other inertial frame, the particle is again by definition not accelerating

$$\frac{d^2\bar{\boldsymbol{x}}}{d\bar{t}^2} = 0; \qquad \bar{\boldsymbol{x}}(\bar{t}) = \bar{\boldsymbol{x}}_0 + \bar{\boldsymbol{v}}_0 \bar{t}. \tag{3.2}$$

Whatever the transformation is between the two sets of time and space coordinates $\{t, \boldsymbol{x}\}$ and $\{\bar{t}, \bar{\boldsymbol{x}}\}$, the transformation has to map straight lines into straight lines — which forces the transformation to be, at the very worst, projective [21, 24]. By additionally requiring that events in a bounded region map into a bounded region this is actually enough to force the transformations to be linear [21, 24]. If one is *only* interested in implementing Newton's first law, then one could get away with using an arbitrary abstract vector space defined over an arbitrary abstract number field. Newton's first law would still require straight lines to map into straight lines, and so would naturally lead to projective transformations. By considering bounded regions of a normed vector space it becomes natural to restrict attention to linear transformations between inertial frames. But as soon as one wishes to implement Newton's second law, one needs to be able to discuss non-zero variable acceleration, which requires some notion of differentiability, which naturally leads one to consider a vector space defined over the real numbers.

Writing the 4-position as

$$X = \begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

we want

$$X \to \bar{X} = M\, X. \tag{3.4}$$

Note that we adopt conventions where both 3-vectors $\boldsymbol{x}$ and 4-vectors X are column vectors. This minimizes the number of special case notational fiddles we have to adopt later on in the discussion.

Note that the primary physics input is the *observation* that inertial frames exist, and from extremely basic notions of kinematics this is enough to argue for linearity. If one additionally (as we shall see later in the article) wants to develop some notion of Lagrangian/Hamiltonian dynamics, then the observation that free inertial particles exist, coupled with Noether's theorem, can be used to argue for the homogeneity of space and time. Some authors prefer to start from homogeneity, and thereby deduce linearity. There are minor technical issues, but for all practical purposes spacetime homogeneity implies and is implied by linearity of the transformations between inertial frames.

We emphasise how basic and fundamental the argument for linearity is — if the transformation law between inertial frames is not linear, then it is really the whole notion of inertial frame that is being undermined. If, as is often (but not always) done, one interprets DSR as implying non-linear space and time transformations, then one is forced to abandon the very notion of inertial frame. With this interpretation DSR-based models generalize the relativity principle, but sacrifice inertial frames, DSR-based models then become "relativity without inertial frames", whereas the whole thrust of this current article is "inertial frames without relativity".

3.3 General representation of inertial transformations

Taking linearity as given:

- In the special case of Newtonian physics (Galilean relativity) we have

$$M = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\boldsymbol{v} & I \end{array}\right]. \tag{3.5}$$

- In the case of Einstein physics (special relativity) we have

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \boldsymbol{v}^T/c^2 \\ \hline -\gamma \boldsymbol{v} & \gamma \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T + [I - \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T] \end{array}\right], \tag{3.6}$$

  with $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{n}$ and $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. One can also write this as

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \boldsymbol{v}^T/c^2 \\ \hline -\gamma \boldsymbol{v} & \gamma \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} + [I - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}] \end{array}\right]. \tag{3.7}$$

- Carroll kinematics ("Alice in wonderland kinematics") is a rarely encountered and somewhat unphysical limit of the Lorentz group where one takes $c \to 0$ and $v \to 0$ while keeping the "slowness" $u = v/c^2$ fixed. The resulting transformations

$$M = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -\boldsymbol{u}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & I \end{array}\right] \tag{3.8}$$

  correspond to [138–142]:

$$t \to \bar{t} = t - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}; \qquad \boldsymbol{x} \to \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}. \tag{3.9}$$

  We will have very little to say concerning this particular option.

In the general case, we only know that M is *some* matrix which we can, without loss of generality, write in the form

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\boldsymbol{u}^T \\ \hline -\boldsymbol{w} & \Sigma \end{array}\right]; \qquad M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} (\gamma - \boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{w})^{-1} & (\boldsymbol{u}^T/\gamma)(\Sigma - \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}^T/\gamma)^{-1} \\ \hline (\gamma - \boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{w})^{-1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{w} & (\Sigma - \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}^T/\gamma)^{-1} \end{array}\right]. \tag{3.10}$$

Specifically, we are *not* at this stage assuming any notion of isotropy. Note that the object $\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}^T = \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u}$ is a 3×3 matrix, while $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ is a scalar. By replacing $\boldsymbol{u} \to \gamma\boldsymbol{u}$, we could also choose to write this in the completely equivalent form

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\boldsymbol{u}^T \\ \hline -\boldsymbol{w} & \Sigma \end{array}\right]; \qquad M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma^{-1}(1 - \boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{w})^{-1} & \boldsymbol{u}^T(\Sigma - \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}^T)^{-1} \\ \hline \gamma^{-1}(1 - \boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{w})^{-1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{w} & (\Sigma - \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}^T)^{-1} \end{array}\right]. \tag{3.11}$$

Alternatively, by now replacing $\boldsymbol{w} \to \Sigma\,\boldsymbol{w}$,

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\boldsymbol{u}^T \\ \hline -\Sigma\boldsymbol{w} & \Sigma \end{array}\right]; \qquad M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma^{-1}(1 - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w})^{-1} & \boldsymbol{u}^T(I - \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}^T)^{-1}\Sigma^{-1} \\ \hline \gamma^{-1}(1 - \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w})^{-1}\boldsymbol{w} & (I - \boldsymbol{w}\boldsymbol{u}^T)^{-1}\Sigma^{-1} \end{array}\right]. \tag{3.12}$$

Any one of these three ways of parameterizing the 4×4 matrix M is completely equivalent and mathematically acceptable, and which one we adopt is simply a matter of taste. (It is easy to explicitly carry out the matrix multiplications to verify that $MM^{-1} = I$.)

3.4 Aether frame and moving frame

Let us now distinguish two frames, the aether frame (the preferred rest frame) F with coordinates X, and the moving frame $\bar{F}$ with coordinates $\bar{X}$. Then for definiteness we

will choose M to map from the aether frame to the moving frame, and M^{-1} to map from the moving frame to the aether frame, so that

$$\bar{X} = M\,X; \qquad X = M^{-1}\,\bar{X}. \tag{3.13}$$

(Choosing which of the frames is the aether, and which is moving, is merely a matter of convention.) We shall now rename things slightly and shall henceforth adopt the specific convention and nomenclature that:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\boldsymbol{u}^T \\ \hline -\Sigma\boldsymbol{v} & \Sigma \end{array}\right]; \qquad M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma^{-1}(1-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v})^{-1} & \boldsymbol{u}^T(I-\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T)^{-1}\Sigma^{-1} \\ \hline \gamma^{-1}(1-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v})^{-1}\boldsymbol{v} & (I-\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T)^{-1}\Sigma^{-1} \end{array}\right]. \tag{3.14}$$

Note that with these conventions both γ and Σ are dimensionless, while $\boldsymbol{v}$ has the dimensions of velocity, and $\boldsymbol{u}$ has dimensions of "slowness" $= 1/(\text{velocity})$. It is again easy to verify that $MM^{-1} = I$. It is also useful to note (see appendix A)

$$\boldsymbol{u}^T(I-\boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T)^{-1} = (1-\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v})^{-1}\boldsymbol{u}^T = (1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}\boldsymbol{u}^T, \tag{3.15}$$

and so write

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\boldsymbol{u}^T \\ \hline -\Sigma\boldsymbol{v} & \Sigma \end{array}\right]; \qquad M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma^{-1}(1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1} & (1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}\,\boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1} \\ \hline \gamma^{-1}(1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}\boldsymbol{v} & (I-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})^{-1}\Sigma^{-1} \end{array}\right]. \tag{3.16}$$

Note that there is a kinematic singularity if $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 1$; in the particular case of special relativity this would correspond to an infinite boost to a frame traveling at lightspeed. But the possible occurrence of these kinematic singularities is a much more general phenomenon, and is not limited to special relativity. Indeed, since with our conventions the matrix M factorizes

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & \boldsymbol{0}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & \Sigma \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & -\boldsymbol{u}^T \\ \hline -\boldsymbol{v} & I \end{array}\right], \tag{3.17}$$

we see that

$$\det(M) = \gamma\det(\Sigma)\ \det\left[\begin{array}{c|c} 1 & -\boldsymbol{u}^T \\ \hline -\boldsymbol{v} & I \end{array}\right] = \gamma\det(\Sigma)\ [1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}]. \tag{3.18}$$

So the existence of the kinematic singularity is equivalent to the non-invertibility of the transformation matrix, a possibility that should (generically) be excluded on physical grounds.

An object that is at rest in the moving frame follows the worldline

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

which in the aether frame coordinates maps into

$$X = M^{-1}\,\bar{X} = \bar{t}\,\gamma^{-1}(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

This implies $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}t$. That is, with these conventions the moving frame has 3-velocity $\boldsymbol{v}_{\text{moving}} = \boldsymbol{v}$ as viewed by the aether, and this is our physical interpretation of the parameter $\boldsymbol{v}$ appearing in the matrix M. But what about the aether frame as seen by the moving frame? An object at rest in the aether frame follows the worldline

$$X = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

which in the moving frame coordinates maps into

$$\bar{X} = M\,X = t\begin{pmatrix} \gamma \\ -\Sigma\boldsymbol{v} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

This implies $\bar{\boldsymbol{x}} = -(\Sigma\boldsymbol{v}/\gamma)\bar{t}$. That is, as viewed in the moving frame, the aether is moving with 3-velocity

$$\boldsymbol{v}_{\text{aether}} = -\frac{\Sigma\,\boldsymbol{v}}{\gamma}. \tag{3.23}$$

Note that $\boldsymbol{v}_{\text{moving}}$ and $\boldsymbol{v}_{\text{aether}}$ are generally *not* equal-but-opposite velocities. In fact, without additional assumptions, in the general case they need not even be collinear.

3.5 Transformation of 3-velocity

From $\bar{X} = M\,X$ we have $d\bar{X} = M\,dX$, whence with the conventions adopted above we see

$$d\bar{t} = \gamma(dt - \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{x}); \qquad d\bar{\boldsymbol{x}} = \Sigma(d\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}dt), \tag{3.24}$$

so that

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} \equiv \frac{d\bar{\boldsymbol{x}}}{d\bar{t}} = \frac{\Sigma(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v})}{\gamma(1 - \boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{x}})}\,. \tag{3.25}$$

This is the general combination of velocities rule. (One can easily see that it is a natural generalization of the usual special relativistic combination of velocities, with current conventions being chosen to make this transformation as simple as possible). Note in particular that an object at rest in the aether frame, with $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$, moves at 3-velocity

$-\Sigma\boldsymbol{v}/\gamma$ in the moving frame, while an object at rest in the moving frame, with $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{0}$, moves at 3-velocity $\boldsymbol{v}$ in the aether frame.

Similarly, from $dX = M^{-1}\, d\bar{X}$ we have

$$dt = \gamma^{-1}(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1} d\bar{t} + (1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}\boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1} d\bar{\boldsymbol{x}}, \tag{3.26}$$

and

$$d\boldsymbol{x} = (I - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})^{-1}\Sigma^{-1} d\bar{\boldsymbol{x}} + \gamma^{-1}(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}\boldsymbol{v} d\bar{t}, \tag{3.27}$$

so that

$$\dot{\boldsymbol{x}} \equiv \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{(I - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})^{-1}\Sigma^{-1}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \gamma^{-1}(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}\boldsymbol{v}}{\gamma^{-1}(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1} + (1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}\boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}}\,. \tag{3.28}$$

We can simplify this to obtain

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\gamma(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})(I - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})^{-1}\Sigma^{-1}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{v}}{1 + \gamma\boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}}. \tag{3.29}$$

But (see appendix A)

$$(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})(I - \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})^{-1} = (1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})I + \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}, \tag{3.30}$$

and so

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\gamma[(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})I + \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}]\,\Sigma^{-1}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{v}}{1 + \gamma\boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}.}. \tag{3.31}$$

Finally

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\gamma(1 - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\,\Sigma^{-1}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}}{1 + \gamma\boldsymbol{u}^T\Sigma^{-1}\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}} + \boldsymbol{v}. \tag{3.32}$$

This last formula seems to be the best one can do. Attempting to change conventions to simplify *this* particular formula leads to problems elsewhere. Note in particular that something at rest in the moving frame, so that $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = 0$, moves at velocity $\boldsymbol{v}$ in the aether frame.

3.6 Groupoid/pseudogroup structure

Physically the matrix M need not be a function of $\boldsymbol{v}$ only — it can also depend on the orientation of the moving inertial frame with respect to the preferred frame, and worse the quantities γ, $\boldsymbol{u}$, and Σ, are (potentially) free parameters in their own right. It is useful to write $M(\bar{F})$, to emphasise that the matrix $M(\bar{F})$ is potentially a function of *all* the parameters characterizing the moving inertial frame $\bar{F}$. (We could furthermore write the various pieces of $M(\bar{F})$ as $\gamma(\bar{F})$, $\boldsymbol{v}(\bar{F})$, $\boldsymbol{u}(\bar{F})$, and $\Sigma(\bar{F})$; while technically more correct, this is so clumsy as to be impracticable, and the frame dependence of these quantities will always be implicitly understood.)

In addition, one should keep in mind that in general the transformation matrices $M(\bar{F})$ could also depend on the internal structure of the particular type of rulers and clocks one is using; it is only for situations of very high symmetry — essentially amounting to adoption of the relativity principle — that the notion of time and distance can be abstracted to have a meaning that is independent of the internal structure of one's choice of clocks and rulers.

Note that in general the set $\{M(\bar{F})\}$, (where $M(\bar{F})$ is the transformation matrix from the aether inertial frame to the moving inertial frame $\bar{F}$), need not form a group; and similarly the set $\{M^{-1}(\bar{F})\}$ need not form a group. There is no need for these sets to be closed under matrix multiplication. Nor are these sets generally closed under matrix inversion. There does not seem to be any specialized mathematical terminology for such objects — they are not semigroups, they are not groupoids, they are not pseudogroups, they are not monoids, they are not cosets, they are not magmas; they are just sets of matrices.

However to transform from one arbitrary inertial frame F_1 to another arbitrary inertial frame F_2, the appropriate transformation is

$$M(F_2, F_1) = M(F_2)\, M(F_1)^{-1}. \tag{3.33}$$

The set $\{M(F_2, F_1)\} = \{M(F_2)\, M(F_1)^{-1}\}$ certainly forms a *groupoid/pseudogroup*, in the sense that the set is closed under the restricted set of compositions (so-called *partial-products*) of the form

$$M(F_3, F_2)M(F_2, F_1) = M(F_3, F_1). \tag{3.34}$$

(The relevant mathematical terminology is not 100% standardized, and different sources prefer to call this mathematical structure either a *groupoid* or a *pseudogroup*.) Note that $M(F, F) = I$, so an identity certainly exists, and that $M(F_2, F_1)^{-1} = M(F_1, F_2)$ so that inverses also exist. Associativity is automatic because matrix multiplication is associative. In general this is the most you can say. The technical difference between a group and a *groupoid/pseudogroup* is in this context *extremely important*. It is this technical mathematical distinction that ultimately allows us to side-step the usual von Ignatowsky theorems (and their variants) that under normal circumstances lead almost uniquely to the Lorentz group or the Galileo group — the physics reason for this extra generality is because while we have assumed linearity of the transformations we have *not* assumed the relativity principle. (Nor have we at this stage assumed isotropy, but that is not important for this particular issue.)

The key physics point is that without the relativity principle $M(F_1, F_2)$ need not depend merely on the relative velocities between the frames F_1 and F_2, but is instead allowed to depend on the separate absolute velocities of the frames F_1 and F_2.

4 Transformations of energy and momentum

Defining energy and momentum, as opposed to purely kinematical notions of velocity and position, requires at least some notion of dynamics. Pick some arbitrary but fixed inertial frame. To study dynamics in that frame, one should at a minimum be able to formulate all three of Newton's laws, and one should at a minimum be able to formulate notions of energy and momentum. Since both Hamiltonian and Lagrangian dynamics are essentially just a reformulation of Newton's three laws, and implicitly of the notions of energy and momentum, one should in each individual inertial frame be able to develop *some* version of Hamiltonian/Lagrangian dynamics. (Furthermore, we note that any attempt at developing usual notions of quantum physics requires one to first develop Hamiltonian/Lagrangian dynamics — either to insert into the path integral formulation, or to serve as the basis for a quantum Hamiltonian underlying the Schroedinger equation.) The natural question then arises as to how the Hamiltonian/Lagrangian dynamics in different inertial frames are related to each other.[1] Understanding this will tell us how energy and momentum in different inertial frames are related to each other.

4.1 Defining energy and momentum

Ignoring interactions for now, in view of the homogeneity of spacetime we shall assume that each particle has associated with it *some* Lagrangian $L(\dot{\boldsymbol{x}})$ which leads to a momentum $\boldsymbol{p}(\dot{\boldsymbol{x}}) = \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{x}}$, and hence to a Hamiltonian $H(\boldsymbol{p})$, which we shall typically just write as $E(\boldsymbol{p})$. Because of space-time homogeneity and the Hamiltonian/Lagrangian framework, Noether's theorem implies energy and momentum conservation:

$$\sum_{\text{in}} E_i = \sum_{\text{out}} E_i; \qquad \sum_{\text{in}} \boldsymbol{p}_i = \sum_{\text{out}} \boldsymbol{p}_i. \tag{4.1}$$

Now the inertial equations $\ddot{\boldsymbol{x}} = 0$ will be satisfied for any arbitrary $L(\dot{\boldsymbol{x}})$. (Note the absence of any explicit t or $\boldsymbol{x}$ dependence.) To operationally determine a specific $L(\dot{\boldsymbol{x}})$ that can usefully characterize a specific particle, you will have to perform a large number of collisions at various 3-velocities, compare input and output states, and data-fit to extract suitable $E_i(\dot{\boldsymbol{x}})$ and $\boldsymbol{p}_i(\dot{\boldsymbol{x}})$ corresponding to the various particles in your universe of discourse. Once this is done you can build a model for the $L_i(\dot{\boldsymbol{x}})$ using

$$L_i(\dot{\boldsymbol{x}}) = L_i(\boldsymbol{0}) + \int_{\boldsymbol{0}}^{\dot{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{p}(\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}) \cdot d\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}. \tag{4.2}$$

[1] *Some* interesting questions can nevertheless be dealt with by working within a fixed but arbitrary inertial frame and not worrying about the transformation rules. For instance, scattering and decay thresholds in Lorentz violating theories can usefully be dealt with in such a manner, see for instance [64, 65, 71–81, 87, 101]. This has led us to spin off such considerations into a separate article [104].

Note that, in modelling the $\boldsymbol{p}_i(\dot{\boldsymbol{x}})$, one would have to take into account the consistency condition $\nabla_{\dot{\boldsymbol{x}}} \times \boldsymbol{p}_i(\dot{\boldsymbol{x}})$ required for this construction to be path independent in velocity space.

But even after one has done this, the construction *cannot be unique* — for any set of *constants* ϵ_i and $\boldsymbol{\pi}_i$ such that $\sum_{\text{in}} \epsilon_i = \sum_{\text{out}} \epsilon_i$ and $\sum_{\text{in}} \boldsymbol{\pi}_i = \sum_{\text{out}} \boldsymbol{\pi}_i$ we see that the assignments

$$E_i \leftrightarrow E_i + \epsilon_i; \qquad \boldsymbol{p}_i \leftrightarrow \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{\pi}_i \tag{4.3}$$

are physically indistinguishable. But that means the Lagrangians

$$L_i(\dot{\boldsymbol{x}}) \leftrightarrow L_i(\dot{\boldsymbol{x}}) - \epsilon_i + \boldsymbol{\pi}_i \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \tag{4.4}$$

are physically indistinguishable. In terms of the action this means

$$S_i = \int L_i(\dot{\boldsymbol{x}})dt \leftrightarrow S_i = \int L_i(\dot{\boldsymbol{x}})dt - \epsilon_i(t_F - t_I) + \boldsymbol{\pi}_i \cdot (\boldsymbol{x}_F - \boldsymbol{x}_I) \tag{4.5}$$

are physically indistinguishable — which is physically and mathematically obvious in view of the fact that the two actions differ only by boundary terms. This intrinsic ambiguity in the definition of energy and momentum will (perhaps unfortunately) turn out to be important. One could try to resolve these ambiguities in a number of different ways:

- For instance, the ambiguity in momentum could be fixed by setting the momentum at zero velocity to be zero: $\boldsymbol{p}(\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. Sometimes this works well, sometimes it does not.

- The ambiguity in energy is equivalent to an ambiguity in rest energy $E(\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0})$; attempting to set the rest energy to zero is often severely problematic.

In general it is best to keep this freedom available in the calculation as long as possible.

4.2 Affine versus linear transformations

What can we now say about energy and momentum, and their transformation properties, using only linearity of the transformations between inertial frames? (Recall that we very specifically do not assume isotropy or any form of the relativity principle.)

Consider a single particle, but multiple inertial frames. To even begin to talk about energy and momentum, in each frame one must be able to set up a suitable Lagrangian and Hamiltonian, and there should be some as yet unspecified relationship between the Lagrangians and Hamiltonians in these distinct inertial frames. Furthermore, extrema of the action as calculated in one inertial frame must coincide with extrema of the action calculated in any other inertial frame.

That is, in complete generality we should demand that for any two inertial frames the action calculated in these frames should be equal up to boundary terms, and in each individual frame we know the action is ambiguous up to boundary terms. In view of the groupoid structure of the transformations between inertial frames there is no loss of generality in considering one moving frame $\bar{F}$ plus the aether frame F for which we can write

$$\int \bar{L}\, d\bar{t} + (\text{boundary terms}) = \int L\, dt + (\text{boundary terms}). \tag{4.6}$$

In view of our previous discussion this implies

$$\int \left\{ \bar{L} - \bar{\epsilon} + \bar{\boldsymbol{\pi}} \cdot (d\bar{\boldsymbol{x}}/d\bar{t}) \right\} d\bar{t} = \int \left\{ L - \epsilon + \boldsymbol{\pi} \cdot (d\boldsymbol{x}/dt) \right\} dt. \tag{4.7}$$

But since $L = -(E - \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}})$ this implies

$$\int \left\{ (\bar{E} + \bar{\epsilon}) - (\bar{\boldsymbol{p}} + \bar{\boldsymbol{\pi}}) \cdot (d\bar{\boldsymbol{x}}/d\bar{t}) \right\} d\bar{t} = \int \left\{ (E + \epsilon) - (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\pi}) \cdot (d\boldsymbol{x}/dt) \right\} dt. \tag{4.8}$$

Therefore

$$(\bar{E} + \bar{\epsilon})\, d\bar{t} - (\bar{\boldsymbol{p}} + \bar{\boldsymbol{\pi}}) \cdot d\bar{\boldsymbol{x}} = (E + \epsilon)\, dt - (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{\pi}) \cdot d\boldsymbol{x}. \tag{4.9}$$

So now in complete generality we have

$$(\bar{E} + \bar{\epsilon}, -\bar{\boldsymbol{p}}^T - \bar{\boldsymbol{\pi}}^T) \begin{pmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} = (E + \epsilon, -\boldsymbol{p}^T - \boldsymbol{\pi}^T) \begin{pmatrix} dt \\ d\boldsymbol{x} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

But

$$\begin{pmatrix} d\bar{t} \\ d\bar{\boldsymbol{x}} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} dt \\ d\boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

therefore implying both

$$(E + \epsilon, -\boldsymbol{p}^T - \boldsymbol{\pi}^T) = (\bar{E} + \bar{\epsilon}, -\bar{\boldsymbol{p}}^T - \bar{\boldsymbol{\pi}}^T)\, M, \tag{4.12}$$

and

$$(\bar{E} + \bar{\epsilon}, -\bar{\boldsymbol{p}}^T - \bar{\boldsymbol{\pi}}^T) = (E + \epsilon, -\boldsymbol{p}^T - \boldsymbol{\pi}^T)\, M^{-1}. \tag{4.13}$$

These are *affine* transformation laws for energy and momentum, (that is, linear plus an inhomogeneous offset), with the affine piece only depending on the intrinsic ambiguities $\left(\epsilon, -\boldsymbol{\pi}^T\right)$ and $\left(\bar{\epsilon}, -\bar{\boldsymbol{\pi}}^T\right)$ in the energy and momentum. Note that $P = (E, -\boldsymbol{p}^T)$ transforms in the dual space [that is, dual to 4-position $X = (t, \boldsymbol{x}^T)^T$]. To be explicit about this

$$E \to \bar{E} = \frac{E - \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{v}}{\gamma(1 - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v})} + \frac{\epsilon - \boldsymbol{\pi}^T \boldsymbol{v}}{\gamma(1 - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v})} - \bar{\epsilon}, \tag{4.14}$$

and

$$\boldsymbol{p} \to \bar{\boldsymbol{p}} = (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} (\boldsymbol{p} - E\boldsymbol{u}) + (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} (\boldsymbol{\pi} - \epsilon \boldsymbol{u}) - \bar{\boldsymbol{\pi}}. \quad (4.15)$$

In terms of dot and tensor products we can rewrite this as

$$E \to \bar{E} = \frac{E - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}}{\gamma(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})} + \frac{\epsilon - \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{v}}{\gamma(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})} - \bar{\epsilon}, \quad (4.16)$$

and

$$\boldsymbol{p} \to \bar{\boldsymbol{p}} = (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^{-1} (\boldsymbol{p} - E\boldsymbol{u}) + (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^{-1} (\boldsymbol{\pi} - \epsilon \boldsymbol{u}) - \bar{\boldsymbol{\pi}}. \quad (4.17)$$

(One can now begin to see how the Lorentz and Galilean transformations might emerge as special cases of this very general result.) The inverse transformations are somewhat simpler

$$\bar{E} \to E = \gamma \bar{E} + \bar{\boldsymbol{p}}^T \Sigma \boldsymbol{v} + \gamma \bar{\epsilon} + \bar{\boldsymbol{\pi}}^T \Sigma \boldsymbol{v} - \epsilon, \quad (4.18)$$

and

$$\bar{\boldsymbol{p}} \to \boldsymbol{p} = \gamma \bar{E} \boldsymbol{u} + \Sigma^T \bar{\boldsymbol{p}} + \gamma \bar{\epsilon} \boldsymbol{u} + \Sigma^T \bar{\boldsymbol{\pi}} - \boldsymbol{\pi}. \quad (4.19)$$

Suppose we now consider the *same* particle at two different 3-velocities, but working with the same two inertial frames F and $\bar{F}$; then in terms of energy and momentum *differences*, we can write a *homogeneous* linear transformation law of the form

$$\left([\bar{E}_1 - \bar{E}_2], -[\bar{\boldsymbol{p}}_1 - \bar{\boldsymbol{p}}_2]^T\right) = \left([E_1 - E_2], -[\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2]^T\right) \; M^{-1}. \quad (4.20)$$

That is:

$$\Delta E \to \Delta \bar{E} = \frac{\Delta E - \Delta \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}}{\gamma(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})}, \quad (4.21)$$

and

$$\Delta \boldsymbol{p} \to \Delta \bar{\boldsymbol{p}} = (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^{-1} (\Delta \boldsymbol{p} - \Delta E \boldsymbol{u}). \quad (4.22)$$

We need to compare the *same* particle at two different velocities, since otherwise there is no particular reason for the $\left(\epsilon, -\boldsymbol{\pi}^T\right)$ and $\left(\bar{\epsilon}, -\bar{\boldsymbol{\pi}}^T\right)$ to be the same for the two situations. Note that for two otherwise identical particles one could in principle choose differing values for the parameters $\left(\epsilon, -\boldsymbol{\pi}^T\right)$ and $\left(\bar{\epsilon}, -\bar{\boldsymbol{\pi}}^T\right)$, thereby making them distinguishable. This does not appear to be what happens in our universe, so we shall assume that the quantities $\left(\epsilon, -\boldsymbol{\pi}^T\right)$ and $\left(\bar{\epsilon}, -\bar{\boldsymbol{\pi}}^T\right)$, while they might depend on the inertial frame one is working in, are at least universal for any particular particle species.

Note that in terms of energy-momentum differences the inverse transformations are

$$\Delta \bar{E} \to \Delta E = \gamma \Delta \bar{E} + \Delta \bar{\boldsymbol{p}}^T \Sigma \boldsymbol{v}, \quad (4.23)$$

and

$$\Delta\bar{\boldsymbol{p}} \to \Delta\boldsymbol{p} = \gamma\Delta\bar{E}\boldsymbol{u} + \Sigma^T\,\Delta\bar{\boldsymbol{p}}. \tag{4.24}$$

As a consistency check on the general formalism we can readily verify that these energy-momentum transformation laws are compatible with, and permit us to recover, the purely kinematical velocity combination rules. See appendix B for details.

4.3 Summary

For each individual particle species we have

$$E \to \bar{E} = \frac{E - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}{\gamma(1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})} + \frac{\epsilon - \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{v}}{\gamma(1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})} - \bar{\epsilon}, \tag{4.25}$$

and

$$\boldsymbol{p} \to \bar{\boldsymbol{p}} = (\Sigma^{-1})^T(I - \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})^{-1}(\boldsymbol{p} - E\boldsymbol{u}) + (\Sigma^{-1})^T(I - \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})^{-1}(\boldsymbol{\pi} - \epsilon\boldsymbol{u}) - \bar{\boldsymbol{\pi}}, \tag{4.26}$$

while the inverse transformations are

$$\bar{E} \to E = -\epsilon + \gamma\bar{E} + \bar{\boldsymbol{p}}\cdot(\Sigma\boldsymbol{v}) + \gamma\bar{\epsilon} + \bar{\boldsymbol{\pi}}\cdot(\Sigma\boldsymbol{v}), \tag{4.27}$$

and

$$\bar{\boldsymbol{p}} \to \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{\pi} + \gamma\bar{E}\boldsymbol{u} + \Sigma^T\bar{\boldsymbol{p}} + \gamma\bar{\epsilon}\boldsymbol{u} + \Sigma^T\bar{\boldsymbol{\pi}}. \tag{4.28}$$

We have a certain amount of freedom to choose ϵ and $\boldsymbol{\pi}$, and $\bar{\epsilon}$ and $\bar{\boldsymbol{\pi}}$. One obvious choice would be to always make the transformation laws linear; however as we shall soon see this is not always the best thing to do.

5 Examples

Let us now consider the very standard cases of Galilean invariance and Lorentz invariance, comparing affine and linear transformation laws for energy-momentum.

5.1 Galileo group (affine version)

For Galilean kinematics we have

$$M = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline -\boldsymbol{v} & I \end{array}\right], \tag{5.1}$$

so

$$\bar{t} = t; \qquad \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t; \qquad \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}. \tag{5.2}$$

Now *one* natural choice is to choose the particularly simple and standard Lagrangians

$$L = \frac{1}{2}m||\dot{\boldsymbol{x}}||^2; \qquad \bar{L} = \frac{1}{2}m||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}||^2. \tag{5.3}$$

(We shall soon see that there are also other choices one can make.) Then

$$\bar{L} = \frac{1}{2}m||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}||^2 = \frac{1}{2}m||\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}||^2 = \frac{1}{2}m||\dot{\boldsymbol{x}}||^2 - m\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}m||\boldsymbol{v}||^2. \tag{5.4}$$

That is

$$\bar{L} = L + \frac{1}{2}m||\boldsymbol{v}||^2 - m\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}. \tag{5.5}$$

Now note

$$\bar{\boldsymbol{p}} = m\dot{\boldsymbol{x}} - m\boldsymbol{v} = m\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}; \qquad \bar{H} = \bar{\boldsymbol{p}}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} - \bar{L} = \frac{||\bar{\boldsymbol{p}}||^2}{2m}. \tag{5.6}$$

So working explicitly, with these particular conventions, we have *affine* transformations for energy-momentum:

$$\bar{E} = E - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}m||\boldsymbol{v}||^2; \qquad \bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} - m\boldsymbol{v}. \tag{5.7}$$

In contrast, working directly from the general transformation laws derived above, and taking $\gamma = 1$, $\boldsymbol{u} = 0$, and $\Sigma = I$, we have

$$E \to \bar{E} = -\bar{\epsilon} + E - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} + [\epsilon - \boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{v}] = E - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}m||\boldsymbol{v}||^2, \tag{5.8}$$

and

$$\boldsymbol{p} \to \bar{\boldsymbol{p}} = -\bar{\boldsymbol{\pi}} + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} - m\boldsymbol{v}, \tag{5.9}$$

from which we deduce that this particular way of implementing Galilean mechanics corresponds to the choices

$$\bar{\epsilon} = -\frac{1}{2}m||\boldsymbol{v}||^2; \qquad \bar{\boldsymbol{\pi}} = m\boldsymbol{v}; \qquad \epsilon = 0; \qquad \boldsymbol{\pi} = 0. \tag{5.10}$$

(Remember that by convention $\bar{F}$ is the moving frame while F is the "aether" frame. Note that it is the quantities $\{\bar{\epsilon}, \bar{\boldsymbol{\pi}}\}$ associated with the moving frame that are non-zero, and that these quantities depend on the velocity $\boldsymbol{v}$ of the moving frame.) The inverse transformations are

$$\bar{E} \to E = -\epsilon + \bar{E} + \bar{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v} + \bar{\epsilon} + \bar{\boldsymbol{\pi}}\cdot\boldsymbol{v} = \bar{E} + \bar{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}m||\boldsymbol{v}||^2, \tag{5.11}$$

and

$$\bar{\boldsymbol{p}} \to \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{\pi} + \bar{\boldsymbol{p}} + \bar{\boldsymbol{\pi}} = \bar{\boldsymbol{p}} + m\boldsymbol{v}. \tag{5.12}$$

This is the "usual" way of doing Galilean dynamics, which unavoidably leads to *affine* transformations for energy and momentum.

A somewhat subtle message to be taken from the discussion is this: Since affine transformations arise so naturally in this extremely straightforward setting, it seems unlikely that the affine features of the energy-momentum transformations could always be completely eliminated in more general settings.

5.2 Lorentz group (linear version)

In this case the Lorentz transformations are

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \boldsymbol{v}^T/c^2 \\ \hline -\gamma \boldsymbol{v} & \gamma \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} + [I - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}] \end{array}\right] \tag{5.13}$$

with $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{n}$ and $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. The *usual* form of the relativistic Lagrangian is

$$L = -mc^2\sqrt{1 - ||\dot{\boldsymbol{x}}||^2/c^2}, \tag{5.14}$$

so

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1 - ||\dot{\boldsymbol{x}}||^2/c^2}}; \qquad H = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - ||\dot{\boldsymbol{x}}||^2/c^2}}. \tag{5.15}$$

Furthermore

$$\bar{L} = -mc^2\sqrt{1 - ||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}||^2/c^2}, \tag{5.16}$$

so

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \frac{m\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}}{\sqrt{1 - ||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}||^2/c^2}}; \qquad \bar{H} = \bar{\boldsymbol{p}} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} - \bar{L} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - ||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}||^2/c^2}}, \tag{5.17}$$

and in fact

$$\bar{L}\, d\bar{t} = L\, dt, \tag{5.18}$$

implying both $\epsilon = 0$ and $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$, and $\bar{\epsilon} = 0$ and $\bar{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{0}$. Then the energy-momentum transformations are just the usual *linear* Lorentz transformations

$$(E, -\boldsymbol{p}^T) = (\bar{E}, -\bar{\boldsymbol{p}}^T)M, \tag{5.19}$$

and

$$(\bar{E}, -\bar{\boldsymbol{p}}^T) = (E, -\boldsymbol{p}^T)M^{-1}. \tag{5.20}$$

This is the standard way of implementing Lagrangian and Hamiltonian mechanics in the presence of Lorentz symmetry.

5.3 Lorentz group (affine version)

We could have chosen a slightly different normalization for L and H. If we take

$$L = mc^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - ||\dot{\boldsymbol{x}}||^2/c^2} \right\}, \tag{5.21}$$

then

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\dot{\boldsymbol{x}}}{\sqrt{1 - ||\dot{\boldsymbol{x}}||^2/c^2}}; \qquad H = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - ||\dot{\boldsymbol{x}}||^2/c^2}} - mc^2. \tag{5.22}$$

Furthermore

$$\bar{L} = mc^2 \left\{ 1 - \sqrt{1 - ||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}||^2/c^2} \right\}, \tag{5.23}$$

so

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \frac{m\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}}{\sqrt{1 - ||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}||^2/c^2}}; \qquad \bar{H} = \bar{\boldsymbol{p}} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} - \bar{L} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - ||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}||^2/c^2}} - mc^2. \tag{5.24}$$

In fact with this normalization

$$[\bar{L} - mc^2]\, d\bar{t} = [L - mc^2]\, dt, \tag{5.25}$$

whence

$$\bar{\epsilon} = mc^2; \quad \bar{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{0}; \qquad \text{and} \qquad \epsilon = mc^2; \qquad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}. \tag{5.26}$$

We can rephrase this in terms of the 4-velocities of the "aether" and moving frames as

$$\begin{pmatrix} \bar{\epsilon} \\ \bar{\boldsymbol{\pi}} \end{pmatrix} = mc^2\, \bar{V}; \qquad \begin{pmatrix} \epsilon \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix} = mc^2\, V; \tag{5.27}$$

With these choices the energy-momentum transformations look slightly unusual. Taking $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{p}$ for simplicity (the non-collinear case does not teach us anything new) we now have

$$E \to \bar{E} = \gamma([mc^2 + E] - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}) - mc^2, \tag{5.28}$$

and

$$\boldsymbol{p} \to \bar{\boldsymbol{p}} = \gamma(\boldsymbol{p} - [mc^2 + E]\boldsymbol{v}/c^2). \tag{5.29}$$

The inverse transformations are

$$\bar{E} \to E = \gamma([mc^2 + \bar{E}] + \bar{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{v}) - mc^2, \tag{5.30}$$

and

$$\bar{\boldsymbol{p}} \to \boldsymbol{p} = \gamma([mc^2 + \bar{E}]\boldsymbol{v}/c^2 + \bar{\boldsymbol{p}}). \tag{5.31}$$

These *affine* transformations make perfectly good physical sense once you realize that, with the conventions of this subsection, the E's in question are just the relativistic kinetic energies — quantities that are normally denoted by K:

$$E_{\text{here}} = E_{\text{total}} - mc^2 = K. \tag{5.32}$$

Then

$$K \to \bar{K} = \gamma([mc^2 + K] - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}) - mc^2, \tag{5.33}$$

and

$$\boldsymbol{p} \to \bar{\boldsymbol{p}} = \gamma(\boldsymbol{p} - [mc^2 + K]\boldsymbol{v}/c^2), \tag{5.34}$$

while

$$\bar{K} \to K = \gamma([mc^2 + \bar{K}] + \bar{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{v}) - mc^2, \tag{5.35}$$

and

$$\bar{\boldsymbol{p}} \to \boldsymbol{p} = \gamma([mc^2 + \bar{K}]\boldsymbol{v}/c^2 + \bar{\boldsymbol{p}}). \tag{5.36}$$

These are manifestly just a disguised form of the usual Lorentz transformations. Note that the formal $c \to \infty$ limit of *these* (slightly nonstandard) affine equations is

$$K \to \bar{K} = K - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}m||\boldsymbol{v}||^2; \qquad \boldsymbol{p} \to \bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p} - m\boldsymbol{v}; \tag{5.37}$$

and

$$\bar{K} \to K = \bar{K} + \bar{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{2}m||\boldsymbol{v}||^2; \qquad \bar{\boldsymbol{p}} \to \boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}} + m\boldsymbol{v}. \tag{5.38}$$

These are the (affine) transformation laws for (the usual form of) the Galileo group.

Again, the somewhat subtle message to take from this is that since the affine parameters ϵ and $\boldsymbol{\pi}$, and $\bar{\epsilon}$ and $\bar{\boldsymbol{\pi}}$, are already so important in situations of extremely high symmetry (the Lorentz group, the Galileo group), then they are also likely to be important in any situations where these symmetries are broken.

5.4 Galileo group (linear version)

The previous discussion suggests that there might be *some* (perhaps nonstandard) set of conventions that would make the energy and momentum transform linearly for the Galileo group. That is, there might be *some* way of arranging things so that for the Galileo group

$$E \to \bar{E} = E - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}; \qquad \boldsymbol{p} \to \bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}. \tag{5.39}$$

How would we do that? It will have to be something rather unusual. Choose the following Lagrangians:

$$L = \frac{1}{2}m||\dot{\boldsymbol{x}}||^2; \qquad \bar{L} = \frac{1}{2}m||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{v}||^2. \tag{5.40}$$

Then the momenta are

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{x}}; \qquad \bar{\boldsymbol{p}} = m(\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{v}) = m\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}. \tag{5.41}$$

The energy in the aether frame is (as usual)

$$E = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - L = \frac{1}{2} m ||\dot{\boldsymbol{x}}||^2. \tag{5.42}$$

However with these conventions the energy in the moving frame is

$$\bar{E} = \bar{\boldsymbol{p}} \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} - \bar{L} = m(\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{v}) \cdot \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} - \frac{1}{2} m ||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{v}||^2 \tag{5.43}$$

$$= m\dot{\boldsymbol{x}} \cdot (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) - \frac{1}{2} m ||\dot{\boldsymbol{x}}||^2 \tag{5.44}$$

$$= \frac{1}{2} m ||\dot{\boldsymbol{x}}||^2 - m\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v} = E - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{5.45}$$

Now $\bar{L} = \frac{1}{2} m ||\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \boldsymbol{v}||^2$, is certainly an "odd" and "unusual" Lagrangian to choose for a free non-relativistic particle in the moving frame, but it is by no means "wrong" — it certainly does the job. One certainly has the correct equations of motion $\ddot{\bar{\boldsymbol{x}}} = 0$, and for *this* definition of energy and momentum, albeit "odd" and "unusual", the energy-momentum transformation laws are explicitly *linear*:

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}; \qquad \bar{E} = E - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{5.46}$$

Note that we have made the quantities $\{\epsilon, \boldsymbol{\pi}\}$ and $\{\bar{\epsilon}, \bar{\boldsymbol{\pi}}\}$ simple, in fact zero, at the price of making the moving-frame Lagrangian complicated. (For some comments in a similar vein, see section II.A of reference [143].)

5.5 Summary

When looking at how this general framework and formalism applies to the Lorentz group we saw that there were good choices for ϵ and $\boldsymbol{\pi}$, and $\bar{\epsilon}$ and $\bar{\boldsymbol{\pi}}$, and also "bad" (or rather, sub-optimal) choices. There seems to be considerable freedom in how one picks ϵ and $\boldsymbol{\pi}$, and $\bar{\epsilon}$ and $\bar{\boldsymbol{\pi}}$, and so considerable freedom in choosing *affine* versus *linear* transformations for the 4-momentum. Can this freedom be used to improve things? If one is working in a region of parameter space that is "close" to special relativity (a "perturbative" deviation from special relativity) then linear transformations for the 4-momentum would seem to be the most appropriate choice. If one is working in a region of parameter space that is "close" to Galillean relativity (a "perturbative" deviation from Newtonian mechanics) then affine transformations for the 4-momentum would seem to be the most appropriate choice. The general situation is somewhat unclear, but it seems advisable to retain the generality of the full affine transformations as long as possible.

6 On-shell energy-momentum relations

In any particular inertial frame if one measures the energy E and momentum $\boldsymbol{p}$ of an on-shell particle then there will be *some* relation between them; an on-shell energy-momentum relation $E = E(\boldsymbol{p})$. One normally expects a very tight connection between the functional form of these energy-momentum relations and the functional form of the transformations between inertial frames — unfortunately this very tight connection is intimately related with adopting the relativity principle, and will in general fail once the relativity principle is abandoned. That is, in Lorentz violating theories the functional form of the energy-momentum relations and the functional form of the transformations between inertial frames can be (and often are) independent of each other.

6.1 Rest energy without the relativity principle

To see how this comes about, consider the preferred (aether) frame F, and in that frame suppose you measure the energy E and momentum $\boldsymbol{p}$ of the same particle in a number of different kinematic states to map out the energy-momentum relation $E = E(\boldsymbol{p})$ in the aether frame. To each momentum $\boldsymbol{p}$ we associate a 3-velocity $\boldsymbol{v} = \partial E/\partial \boldsymbol{p}$. Now go to the rest frame $\bar{F}$ of the particle (of course the rest frame of the particle is moving with respect to the aether). In the rest frame the particle will by definition have 3-velocity zero $\bar{\boldsymbol{v}} = 0$, and will have some energy, call it the rest-energy $\bar{E} = E_0$ and some momentum, call it the rest-momentum $\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}_0$.

If the relativity principle holds then the rest-energy and rest-momentum must be intrinsic properties of the particle that cannot depend on its velocity with respect to the aether — and in particular the rest-momentum is most typically chosen to be zero. But once one has preferred frame effects the rest-energy and rest-momentum can very definitely depend on the state of motion with respect to the aether. That is, generally we will have $\bar{E} = E_0(\bar{F})$ and $\bar{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}_0(\bar{F})$.

Transforming back to the aether frame we now see

$$E = \gamma E_0(\bar{F}) + \boldsymbol{p}_0(\bar{F})^T \Sigma \boldsymbol{v} + \gamma \bar{\epsilon} + \bar{\boldsymbol{\pi}}^T \Sigma \boldsymbol{v} - \epsilon, \tag{6.1}$$

and

$$\boldsymbol{p} = \gamma E_0(\bar{F}) \boldsymbol{u} + \Sigma^T \boldsymbol{p}_0(\bar{F}) + \gamma \bar{\epsilon} \boldsymbol{u} + \Sigma^T \bar{\boldsymbol{\pi}} - \boldsymbol{\pi}. \tag{6.2}$$

In general, unless further assumptions are made, this is the best one can do.

We now use the freedom to choose the quantities $\{\epsilon, \boldsymbol{\pi}\}$ and $\{\bar{\epsilon}, \bar{\boldsymbol{\pi}}\}$ to make life as simple as possible. Without any real loss of generality we can choose $\bar{\boldsymbol{\pi}} = -\boldsymbol{p}_0(\bar{F})$ in which case

$$E = \gamma E_0(\bar{F}) + \gamma \bar{\epsilon} - \epsilon, \tag{6.3}$$

and

$$\boldsymbol{p} = \gamma E_0(\bar{F})\boldsymbol{u} + \gamma\bar{\epsilon}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\pi}. \tag{6.4}$$

(This is equivalent to choosing conventions so that in the rest frame the total "effective" rest momentum $\boldsymbol{p}_0 + \bar{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{0}$.) Let us now for definiteness choose $\epsilon = 0$ and $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$, then

$$E = \gamma[E_0(\bar{F}) + \bar{\epsilon}], \tag{6.5}$$

and

$$\boldsymbol{p} = \gamma[E_0(\bar{F}) + \bar{\epsilon}]\boldsymbol{u} = E\boldsymbol{u}. \tag{6.6}$$

(We have done things in this manner so that it becomes clear just how general the relation $\boldsymbol{p} = E\boldsymbol{u}$ really is.) Finally choose $\bar{\epsilon} = 0$, then with these choices we can write

$$E = \gamma E_0(\bar{F}), \tag{6.7}$$

and

$$\boldsymbol{p} = \gamma E_0(\bar{F})\boldsymbol{u} = E\boldsymbol{u}. \tag{6.8}$$

Introduce an arbitrary but fixed constant c with the dimensions of velocity (not necessarily the speed of light), and some arbitrary function $\varpi(\bar{F})$ which is completely at our disposal. Then in the aether frame we can write

$$E^2 - \varpi||\boldsymbol{p}||^2c^2 = \gamma^2(1 - \varpi c^2||\boldsymbol{u}||^2)E_0^2(\bar{F}). \tag{6.9}$$

Two particularly useful (but by no means inevitable) choices are to take:

- Choose $\varpi \to 1$ so that

$$E^2 - ||\boldsymbol{p}||^2c^2 = \gamma^2(1 - c^2||\boldsymbol{u}||^2)E_0^2(\bar{F}). \tag{6.10}$$

- Choose $\varpi \to ||\boldsymbol{v}||^2/(||\boldsymbol{u}||^2c^4)$ so that

$$E^2 - \frac{||\boldsymbol{v}||^2}{||\boldsymbol{u}||^2c^2}\,||\boldsymbol{p}||^2 = \gamma^2(1 - v^2/c^2)E_0^2(\bar{F}). \tag{6.11}$$

In the case of exact Lorentz invariance we most usefully choose $\varpi \to 1$, with the constant c being interpreted as the speed of light, and $\gamma \to 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, while $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/c^2$. Furthermore E_0 is then independent of $\boldsymbol{v}$, so in this case one recovers the usual kinematic relation $E^2 - ||\boldsymbol{p}||^2c^2 = E_0^2$, while (as expected) $E = \gamma E_0$ and $\boldsymbol{p} = \gamma E_0\boldsymbol{v}/c^2 = E\boldsymbol{v}/c^2$. In the absence of Lorentz invariance one generically has to live with the more complicated kinematics presented above. The notion of rest energy E_0 still makes perfectly good sense, but the rest energy can depend on the particle's state of motion

through the aether, $E_0(\bar{F})$, and the relation to 4-momentum is considerably more subtle than one might have expected.

The key point here is that the energy-momentum relation $E(\boldsymbol{p})$ and the transformation matrix M are in general independent of each other; knowing one does not necessarily give you the other (except when Lorentz invariance is assumed, or some similar restriction is imposed). There are two additional special cases of considerable interest, which we now discuss.

6.2 Invariant rest energy without the relativity principle

One can speculate or hypothesize that for unknown reasons the internal structure of elementary and composite particles self-regulates so that rest energies are independent of one's state of motion through the aether. One still has rather unusual behaviour in that

$$E = \gamma E_0; \qquad \boldsymbol{p} = \gamma E_0 \boldsymbol{u} = E\boldsymbol{u}; \tag{6.12}$$

while

$$E^2 - \varpi ||\boldsymbol{p}||^2 c^2 = \gamma^2 (1 - \varpi c^2 ||\boldsymbol{u}||^2) E_0^2. \tag{6.13}$$

(Remember $\boldsymbol{u}$ is not necessarily parallel to $\boldsymbol{v}$, neither does $||\boldsymbol{u}||$ equal $||\boldsymbol{v}||$, they do not even have the same dimensions. In addition, all three of the functions $\varpi(\bar{F})$, $\gamma(\bar{F})$, and $\boldsymbol{u}(\bar{F})$ can depend on the particle's state of motion with respect to the aether. In fact ϖ is entirely arbitrary and can be adjusted to taste — we will have cause to use this freedom below.) So even with an invariant rest mass (and this is a rather strong assumption) the 4-momentum of a moving particle is rather definitely non-trivial.

6.3 First minimalist Lorentz-violating model

Another important special case to consider is to assume that the transformations between inertial frames are the usual Lorentz transformations but the energy-momentum relation for at least some of the particles is not Lorentz invariant. This is less bizarre than one might at first glance suspect, and is in fact the option that is in many ways most relevant to the OPERA–MINOS observations. The point is that the physical clocks and rulers we use in our laboratories have internal structures that are for all practical purposes independent of neutrino physics — and we have good phenomenological/observational evidence that (apart possibly from the neutrino sector) Lorentz invariance is an extremely good approximation to empirical reality. So it makes good sense to work in an approximation where all physical clocks and rulers are exactly Lorentz invariant, and the only Lorentz violations are hiding in the neutrino sector. In contrast, if there are significant Lorentz violations in the physics underpinning one's clocks and rulers, then using the Lorentz transformations to inter-relate the space and

time coordinates determined by those clocks and rulers would be a very *bad* and physically unjustified approximation.

More generally, stepping beyond the OPERA–MINOS scenario, let us consider a model where Lorentz-violating physics is confined to a specific sub-sector of the particle physics spectrum. In this situation the rest energy of the Lorentz-violating particles can still depend on their state of motion with respect to the aether. In the aether frame we then have

$$E = \gamma\, E_0(\bar{F}); \qquad \boldsymbol{p} = \gamma\, E_0(\bar{F})\, \boldsymbol{v}/c^2 = E\boldsymbol{v}/c^2; \tag{6.14}$$

while

$$E^2 - ||\boldsymbol{p}||^2 c^2 = E_0^2(\bar{F}). \tag{6.15}$$

Again, even in this simplified situation, the 4-momentum and the kinematic relation are rather definitely non-trivial. If we now transform to a third inertial frame $\bar{\bar{F}}$, then certainly

$$\bar{\bar{E}}^2 - ||\bar{\bar{\boldsymbol{p}}}||^2 c^2 = E^2 - ||\boldsymbol{p}||^2 c^2 = E_0^2(\bar{F}) \tag{6.16}$$

is a Lorentz invariant, but the specific *value* of this Lorentz invariant quantity depends on the absolute state of motion of the Lorentz-violating particle as viewed from the aether frame. The way we have currently set things up, this rest energy could even be direction dependent — no isotropy assumption (at least in the Lorentz-violating sector) has yet been made. If we now add the additional assumption that the Lorentz violating physics is isotropic in the aether frame then

$$E = \gamma E_0(v); \qquad \boldsymbol{p} = \gamma E_0(v)\, \boldsymbol{v}/c^2 = E\boldsymbol{v}/c^2; \tag{6.17}$$

while

$$E^2 - ||\boldsymbol{p}||^2 c^2 = E_0^2(v). \tag{6.18}$$

So we rather explicitly see the manner in which absolute speed with respect to the aether would formally affect on-shell particle energy-momentum relations. We emphasise that in this model, even though the Lorentz-violating particles do not have a Lorentz invariant energy-momentum relation, their energies and 3-momenta nevertheless transform in the usual manner under Lorentz transformations. To make this look more relativistic, one could introduce a 4-velocity V_{aether} for the aether, and another 4-velocity V_{particle} for the Lorentz-violating particle. The speed v of the Lorentz violating particle with respect to the aether is then the usual explicit function of the 4-inner-product $\eta(V_{\text{aether}}, V_{\text{particle}})$ and the kinematic relation takes the form

$$E^2 - ||\boldsymbol{p}||^2 c^2 = E_0^2(\eta(V_{\text{aether}}, V_{\text{particle}})). \tag{6.19}$$

This model is the first of the "minimalist" models of Lorentz violation we refer to in the abstract and introduction. It is particularly useful in that, if one chooses to confine Lorentz violating physics to the neutrino sector, it gives one a very clean specific "target" to begin thinking about when analyzing the OPERA–MINOS observations.

More broadly speaking, even beyond the OPERA–MINOS context, something along the lines of this minimalist model is often implicitly adopted in currently extant analyses of Lorentz violating models, but often without the relevant assumptions being clearly and explicitly laid out. Many current analyses implicitly treat Lorentz violation perturbatively, modelling reality by a Lorentz invariant "core" subject to Lorentz-violating "perturbations". (This is true for instance in the Kostelecky *et al.* Standard Model Extension [26–34], the Coleman–Glashow analyses [64, 65], see also [87], and the Jacobson–Liberati–Mattingly analyses [71–81], see also [101].) Typically, to a first approximation one ignores the effect of any (presumably small) Lorentz-violating physics on the internal structure one's clocks and rulers, thereby implicitly justifying the use of ordinary Lorentz transformations for one's experimentally measured energy and momenta, and focuses attention on subtle deviations from Lorentz invariance that might be probed by suitably designed null experiments. However it should be very much emphasised that if the effect of Lorentz-violating physics ever has non-perturbatively large effects on the internal structure one's clocks and rulers, then one can no longer safely use the ordinary Lorentz transformations for experimentally determined energy and momenta — and instead of adopting some version of the minimalist model above one must then resort to the full power of the preceding analysis.

6.4 Summary

We emphasise that we have gone to all this trouble in setting up a very general formalism in order to have a coherent and consistent framework to operate in once we begin to entertain possible departures from Lorentz invariance. Many of the results derived so far are quite unexpected when one has been trained to always think in a Lorentz invariant (or even Galilean invariant) and relativity principle respecting manner.

7 Adding more constraints

7.1 Linearity plus isotropy

Now let us add the assumption of isotropy — specifically that physics is isotropic in the preferred frame, the aether frame. In particular this means that in the inertial

transformation matrices

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \boldsymbol{u}^T \\ \hline -\Sigma \boldsymbol{v} & \Sigma \end{array}\right]; \qquad M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma^{-1}(1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1} & \boldsymbol{u}^T(I-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})^{-1}\Sigma^{-1} \\ \hline \gamma^{-1}(1-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^{-1}\boldsymbol{v} & (I-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u})^{-1}\Sigma^{-1} \end{array}\right]; \tag{7.1}$$

all vectors and matrices should be constructible only using the vector $\boldsymbol{v}$ and its magnitude — there are now assumed to be no preferred principal axes for the universe. We are also assuming that the frames F and $\bar{F}$ are "aligned" (not rotated with respect to each other). Then isotropy amounts to

$$\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}; \qquad \Sigma = aI + b\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}. \tag{7.2}$$

In fact it is now useful to introduce an arbitrary but fixed unspecified constant c with the dimensions of velocity, and a dimensionless parameter ζ, to write

$$\boldsymbol{u} = \zeta\boldsymbol{v}/c^2. \tag{7.3}$$

Similarly, let us introduce dimensionless variables χ and ξ to write

$$\Sigma = \gamma\chi\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \xi[I-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}]. \tag{7.4}$$

Recall $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{n}$. By appealing to isotropy, the four quantities γ, χ, ζ, and ξ are arbitrary dimensionless functions of the dimensionless variable v^2/c^2. By combining linearity with isotropy in this manner we have obtained a variant of the Robertson–Mansouri–Sexl framework; see [144, 145], and section 3.2 of [81]. (The RMS formalism invokes several other technical assumptions not relevant to the current discussion, and is not quite identical to our own framework.) Note that the quantities γ, χ, ζ, and ξ can still depend on the internal structure of one's clocks and rulers.

We now have

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\zeta\boldsymbol{v}^T/c^2 \\ \hline -\gamma\chi\boldsymbol{v} & \gamma\chi\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \xi[I-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}] \end{array}\right]. \tag{7.5}$$

An intermediate step in calculating the inverse transformation is

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma^{-1}(1-\zeta v^2/c^2)^{-1} & \zeta\boldsymbol{v}^T(I-\zeta\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T/c^2)^{-1}\Sigma^{-1}/c^2 \\ \hline \gamma^{-1}(1-\zeta v^2/c^2)^{-1}\boldsymbol{v} & (I-\zeta\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T/c^2)^{-1}\Sigma^{-1} \end{array}\right]. \tag{7.6}$$

But

$$\begin{aligned} \Sigma(I-\zeta\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T/c^2) &= (\gamma\chi\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \xi[I-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}])(I-[\zeta v^2/c^2]\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) \\ &= \gamma\chi[1-\zeta v^2/c^2]\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \xi[I-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}], \end{aligned} \tag{7.7}$$

whence

$$(I - \zeta \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T/c^2)^{-1}\Sigma^{-1} = \gamma^{-1}\chi^{-1}[1-\zeta v^2/c^2]^{-1}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \xi^{-1}[I - \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}]. \tag{7.8}$$

So the inverse transformation matrix simplifies to

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \gamma^{-1}(1-\zeta v^2/c^2)^{-1} & \gamma^{-1}(1-\zeta v^2/c^2)^{-1}\zeta\chi^{-1}\boldsymbol{v}^T/c^2 \\ \hline \gamma^{-1}(1-\zeta v^2/c^2)^{-1}\boldsymbol{v} & \gamma^{-1}\chi^{-1}[1-\zeta v^2/c^2]^{-1}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \xi^{-1}[I-\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}] \end{array}\right]. \tag{7.9}$$

By a specialization of our previous discussion:

- The velocity of the moving frame with respect to the aether is $\boldsymbol{v}$.
- The velocity of the aether with respect to the moving frame is $-\chi\boldsymbol{v}$.
- These are now at least collinear, and in fact anti-parallel, but can still differ in magnitude; they are still not equal-but-opposite.

If we rotate to align $\boldsymbol{v}$ along the $\hat{\boldsymbol{x}}$ axis this looks a little simpler:

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma & -\gamma\zeta v/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma\chi v & \gamma\chi & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \xi I \end{array}\right], \tag{7.10}$$

and

$$M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma^{-1}(1-\zeta v^2/c^2)^{-1} & \gamma^{-1}(1-\zeta v^2/c^2)^{-1}\zeta\chi^{-1}v/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline \gamma^{-1}(1-\zeta v^2/c^2)^{-1}v & \gamma^{-1}\chi^{-1}[1-\zeta v^2/c^2]^{-1} & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \xi^{-1}I \end{array}\right]. \tag{7.11}$$

This is as far as you can get with linearity plus isotropy — you still have four arbitrary functions $\gamma(v^2/c^2)$, $\chi(v^2/c^2)$, $\zeta(v^2/c^2)$, and $\xi(v^2/c^2)$ to deal with, but at least it is no longer an arbitrary 4×4 matrix with 16 free components. The set of transformations is still not a group, just a groupoid/pseudogroup.

In view of the isotropy assumption particle rest masses E_0 should depend only on the speed with respect to the aether, hence be of the form $E_0(v)$. Specializing our earlier discussion, with ϖ, γ, and ζ being velocity dependent, in the aether frame we would have

$$E = \gamma E_0(v); \qquad \boldsymbol{p} = \gamma\zeta E_0(v)\boldsymbol{v}/c^2; \tag{7.12}$$

with

$$E^2 - \varpi||\boldsymbol{p}||^2c^2 = \gamma^2\left[1-\varpi\zeta^2v^2/c^2\right]E_0(v)^2. \tag{7.13}$$

Note that Lorentz invariance corresponds to setting $\chi = \zeta = \xi = 1$, with $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, (and in addition demanding $\varpi \to 1$ and that E_0 be constant).

The Galilean limit is somewhat delicate: Physically we want to be looking at some sort of low velocity limit. When moving at zero velocity through the aether we expect $M \to I$ (corresponding to the trivial transformation), so we must have $\chi(0) = \gamma(0) = \xi(0) = 1$. In contrast $\zeta(0)$ should be finite but is otherwise unconstrained. However c is at this stage just some constant with the dimensions of velocity, it does not yet have any deeper physical interpretation, so one can simply absorb $\zeta(0)$ into a redefinition of c and so effectively set $\zeta(0) \to 1$.

- In the transformation matrices M and M^{-1}, this low-velocity limit corresponds to $\zeta = \chi = \gamma = \xi = 1$, with $||\boldsymbol{v}|| \ll c$.

- Because of isotropy, in the low-velocity limit we must have both

$$\gamma(v) \approx 1 + \frac{1}{2}\gamma_2 v^2/c^2 + \ldots, \quad \text{and} \quad \zeta(v) \approx 1 + \frac{1}{2}\zeta_2 v^2/c^2 + \ldots. \tag{7.14}$$

  Furthermore

$$E_0(v) = E_0(0)\ \left\{1 + \frac{1}{2}\kappa_2 v^2/c^2 + \ldots\right\}, \tag{7.15}$$

  so that:

$$E \approx E_0(0) + \frac{1}{2}[E_0(0)/c^2]\{\gamma_2 + \kappa_2\}v^2 + \ldots; \qquad \boldsymbol{p} \approx [E_0(0)/c^2]\boldsymbol{v} + \ldots \tag{7.16}$$

- If we define the low-velocity effective mass by $m_{\text{eff}} = E_0(0)/c^2$ then

$$E \approx m_{\text{eff}}c^2 + \{\gamma_2 + \kappa_2\}\ \frac{||\boldsymbol{p}||^2}{2m_{\text{eff}}} + \ldots; \qquad \boldsymbol{p} \approx m_{\text{eff}}\ \boldsymbol{v} + \ldots \tag{7.17}$$

So there is a sensible low-velocity limit, though it is perhaps more subtle than one might have thought.

7.2 Linearity plus isotropy plus reciprocity

It is sometimes useful to restrict attention to situations where $M^{-1}(\boldsymbol{v}) = M(-\boldsymbol{v})$. Note that this is an additional axiom beyond homogeneity and isotropy.

- This is (one version of) the so-called *reciprocity principle*. It is still weaker than the relativity principle.

- This version of the reciprocity principle, because it also makes assumptions about the transverse directions, is very slightly stronger than asserting that the velocity of any inertial frame as seen from the aether is minus the velocity of the aether as seen from that inertial frame [13].

- The way we have formulated it, reciprocity implies both $\chi = 1$ and $\xi = 1$, and in addition imposes the constraint

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta v^2/c^2}}. \tag{7.18}$$

To see this, compare M with M^{-1} above, and note that $M^{-1}(\boldsymbol{v}) = M(-\boldsymbol{v})$ implies the three relations:

$$\gamma = \gamma^{-1}(1 - \zeta v^2/c^2)^{-1}; \tag{7.19}$$

$$\gamma\chi = \gamma^{-1}\chi^{-1}(1 - \zeta v^2/c^2)^{-1}; \tag{7.20}$$

$$\xi = \xi^{-1}. \tag{7.21}$$

Solving, we see

$$\xi = 1; \qquad \chi = 1; \qquad \gamma^2(1 - \zeta v^2/c^2) = 1. \tag{7.22}$$

Then

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma & -\gamma\zeta v/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma v & \gamma & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]; \qquad M^{-1} = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma & \gamma\zeta v/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline \gamma v & \gamma & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]; \tag{7.23}$$

subject to the constraint

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta v^2/c^2}}. \tag{7.24}$$

Note that you now only have one free function $\zeta(v^2/c^2)$, everything else is determined.

- Working along a somewhat different route, it has been shown [13] that combining relativity+homogeneity+isotropy implies (at least one version of) the reciprocity principle.

- Note that adopting the principle of reciprocity implies the set $\{M(\boldsymbol{v})\}$ is now closed under matrix inversion, though it is still not a group.

- This is not quite special relativity [or even Galilean relativity], but it is getting awfully close.

7.3 Second minimalist Lorentz-violating model

Since the model above (linearity plus isotropy plus reciprocity) is a simple one-function violation of special relativity, it holds a special place in the set of all Lorentz violating (relativity principle violating) theories — this is arguably the simplest violation of special relativity one can have *at the level of the transformations between inertial frames.* At the level of the coordinate transformations

$$t \to \bar{t} = \frac{t - \zeta(v)vx/c^2}{\sqrt{1 - \zeta(v)v^2/c^2}}; \tag{7.25}$$

$$x \to \bar{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \zeta(v)v^2/c^2}}; \tag{7.26}$$

$$y \to \bar{y} = y; \qquad z \to \bar{z} = z. \tag{7.27}$$

The closest one can get to a notion of "interval" is to observe

$$\frac{c^2(\Delta t)^2}{\zeta(v)} - ||\Delta \boldsymbol{x}||^2 = \frac{c^2(\Delta \bar{t}\,)^2}{\zeta(v)} - ||\Delta \bar{\boldsymbol{x}}||^2. \tag{7.28}$$

Recall that $\zeta(v)$ depends on the absolute speed of the moving frame through the aether, so this is only a 2-frame invariant, it is not a general invariant for arbitrary combinations of inertial frames. To be explicit about this, let F_1 and F_2 be two moving frames, then

$$\frac{c^2(\Delta t)^2}{\zeta(v_1)} - ||\Delta \boldsymbol{x}||^2 = \frac{c^2(\Delta t_1\,)^2}{\zeta(v_1)} - ||\Delta \boldsymbol{x}_1||^2, \tag{7.29}$$

and

$$\frac{c^2(\Delta t)^2}{\zeta(v_2)} - ||\Delta \boldsymbol{x}||^2 = \frac{c^2(\Delta t_2\,)^2}{\zeta(v_2)} - ||\Delta \boldsymbol{x}_2||^2. \tag{7.30}$$

But (ultimately due to the lack of the relativity principle, and the consequent lack of group structure for the transformations) there is, under the current assumptions, no simple relationship of this type connecting the measurements in inertial frame F_1 with those in inertial frame F_2.

When we turn to on-shell particle energy-momentum relations we still have invariant masses $E_0(v)$ that can depend on absolute velocity with respect to the aether. Therefore, in view of our previous discussion, in the aether frame we would have

$$E = \frac{E_0(v)}{\sqrt{1 - \zeta(v)v^2/c^2}}; \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\zeta(v)E_0(v)\boldsymbol{v}/c^2}{\sqrt{1 - \zeta(v)v^2/c^2}} = E\boldsymbol{v}/c^2; \tag{7.31}$$

with

$$E^2 - \varpi(v)||\boldsymbol{p}||^2c^2 = \left[\frac{1 - \varpi(v)\zeta^2(v)v^2/c^2}{1 - \zeta(v)v^2/c^2}\right] E_0(v)^2. \tag{7.32}$$

But $\varpi(v)$ is a completely arbitrary function that is entirely at our disposal, so in the current context it makes sense to choose $\varpi = 1/\zeta$ in which case

$$E^2 - \zeta^{-1}(v)\,||\boldsymbol{p}||^2 c^2 = E_0(v)^2. \tag{7.33}$$

Even if we make the additional and rather stringent assumption that rest masses are invariant, independent of absolute velocity through the aether, (and this is very definitely an extra assumption beyond reciprocity), one still picks up non-trivial physics via the v-dependent function $\zeta(v)$:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\zeta(v)v^2/c^2}}; \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\zeta(v)E_0\boldsymbol{v}/c^2}{\sqrt{1-\zeta(v)v^2/c^2}} = E\boldsymbol{v}/c^2; \tag{7.34}$$

with

$$E^2 - \zeta^{-1}(v)\,||\boldsymbol{p}||^2 c^2 = E_0^2. \tag{7.35}$$

This model is the second of the "minimalist" models of Lorentz violation we refer to in the abstract and introduction. It is particularly useful in that it gives one a very clean specific "target" to take aim at.

7.4 Linearity plus isotropy plus reciprocity plus relativity

If we now (finally) adopt the relativity principle, then for arbitrary $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ the object $M(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)$ must equal $M(\boldsymbol{w})$ for *some* $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ (with $\boldsymbol{w}$ being interpreted as the relative velocity of the two inertial frames). But this then implies that the set $\{M(\boldsymbol{v})\}$ forms a group, not merely a groupoid/pseudogroup. We shall see that this group condition implies $\zeta = 1$, whence finally $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. But c was some arbitrary quantity with the dimensions of velocity, it was not pre-judged to be the physical speed of light. Finite c gives you the Lorentz group, infinite c gives the Galileo group. (And the exceptional case $c^2 < 0$ actually means one is in Euclidean signature, and one obtains the $SO(4)$ rotation group. This exceptional case is normally excluded by appeal to a "pre-causality" principle [25].)

As an explicit check, assuming linearity+isotropy+reciprocity we have

$$M_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_1 & -\gamma_1\zeta_1 v_1/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]; \qquad M_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_2 & -\gamma_2\zeta_2 v_2/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]; \tag{7.36}$$

subject to the constraint

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta_i v_i^2/c^2}}. \tag{7.37}$$

Then the group property requires the existence of some v_{12} such that

$$M_1 M_2 = M_{12}. \tag{7.38}$$

Explicitly:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_1\gamma_2(1+\zeta_1 v_1 v_2/c^2) & -\gamma_1\gamma_2(\zeta_1 v_1+\zeta_2 v_2)/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_1\gamma_2(v_1+v_2) & \gamma_1\gamma_2(1+\zeta_2 v_1 v_2/c^2) & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_{12} & -\gamma_{12}\zeta_{12} v_{12}/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_{12} v_{12} & \gamma_{12} & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]. \tag{7.39}$$

But by comparing the diagonal elements this can be true only if $\zeta_1 = \zeta_2$ for all values of v_1 and v_2. That is, $\zeta(v_1) = \zeta(v_2)$ for all values of v_1 and v_2, so that there exists some *velocity independent constant* ζ_0 such that

$$\zeta(v) = \zeta_0. \tag{7.40}$$

This now implies

$$M_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_1 & -\gamma_1\zeta_0 v_1/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]; \qquad M_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_2 & -\gamma_2\zeta_0 v_2/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]. \tag{7.41}$$

The statement $M_1 M_2 = M_{12}$ becomes

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_1\gamma_2(1+\zeta_0 v_1 v_2/c^2) & -\gamma_1\gamma_2\zeta_0(v_1+v_2)/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_1\gamma_2(v_1+v_2) & \gamma_1\gamma_2(1+\zeta_0 v_1 v_2/c^2) & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_{12} & -\gamma_{12}\zeta_0 v_{12}/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_{12} v_{12} & \gamma_{12} & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]. \tag{7.42}$$

But now we can simply absorb ζ_0 into a redefinition of c. After all, c is at this stage just an arbitrary but fixed constant with the dimensions of velocity. Taking $c^2 \to c^2/\zeta_0$ we have

$$M_1 = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_1 & -\gamma_1 v_1/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_1 v_1 & \gamma_1 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]; \qquad M_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_2 & -\gamma_2 v_2/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_2 v_2 & \gamma_2 & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]; \tag{7.43}$$

$$M_1 M_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_1\gamma_2(1+v_1 v_2/c^2) & -\gamma_1\gamma_2(v_1+v_2)/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_1\gamma_2(v_1+v_2) & \gamma_1\gamma_2(1+v_1 v_2/c^2) & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \gamma_{12} & -\gamma_{12} v_{12}/c^2 & \mathbf{0}^T \\ \hline -\gamma_{12} v_{12} & \gamma_{12} & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \end{array}\right]. \tag{7.44}$$

If c^2 is finite and positive, we have the Lorentz transformations. If c^2 is infinite we have Galileo's transformations. This is (essentially) von Ignatowsky's result. (Note that $c^2 = 0$ is hopelessly diseased,[2] while $c^2 < 0$ actually corresponds to Euclidean signature spacetime, with the set $\{M\}$ being the group $SO(4)$ of Euclidean rotations.)

8 Conclusions

We have seen that once one for any reason moves away from Lorentz invariance, and specifically once one discards the relativity principle, then many of the intuitions one has been trained to develop in a special relativistic setting need to be significantly and carefully revised. In a companion article we had considered threshold phenomena [104], which can be studied by picking and working in a particular arbitrary but fixed inertial frame. In the current article we have carefully analyzed what happens to the transformation properties between inertial frames once the relativity principle is abandoned. A key message to take from the above is that the situation is not hopeless — even in the absence of a relativity principle quite a lot can still be said regarding the transformation properties between inertial frames, the combination of 3-velocities, the transformation of 4-momenta, and the interplay between the energy-momentum relations for on-shell particles and the transformation properties between inertial frames.

Key features of the analysis are the groupoid/pseudo-group structure of the set of transformations, the fact that 4-momentum transforms affinely as a dual vector, the fact that there are a number of distinct stages by which Lorentz invariance can be recovered — by successively imposing linearity, then isotropy, then reciprocity, and finally the relativity principle. The net result is a coherent framework within which Lorentz symmetry breaking can be explored in a controlled and internally consistent manner, while retaining usual notions of local physics. Overall this article, and the companion paper [104], provide general techniques of interest when analyzing the OPERA–MINOS (and related) observations; but are in no sense dependent on the details of those specific observations — these articles provide general techniques of interest for handling large classes of Lorentz-violating but local physical models.

[2] It is at this stage, setting $c^2 \to 0$, that one could if desired obtain Carroll kinematics [138–142] by enforcing the particular limit $c^2 \to 0$, while $v \to 0$, but holding the slowness $u = v/c^2$ fixed. The relevance to "real world" physics seems somewhat tenuous.

Acknowledgments

This research was supported by the Marsden Fund, administered by the Royal Society of New Zealand. Additionally, Valentina Baccetti acknowledges support by a Victoria University PhD scholarship, and Kyle Tate acknowledges support by a Victoria University MSc scholarship.

A Some matrix identities

Herein we collect some useful matrix identities of a purely technical nature. First note that

$$(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})^n = I + (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}) \sum_{n=1}^{\infty} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^{n-1} = I + \frac{\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}}{1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}, \quad \text{(A.1)}$$

with this particular derivation holding for $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| < 1$, though the result itself

$$(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})^{-1} = I + \frac{\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}}{1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}, \quad \text{(A.2)}$$

holds for $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \neq 1$, as can easily be verified by multiplying both sides of the equation above by $(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})$ and noting that $\det(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}) = 1 - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$. (The case $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 1$ is the kinematic singularity alluded to previously.) Therefore

$$\boldsymbol{u}^T (I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})^{-1} = \boldsymbol{u}^T + \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) \boldsymbol{u}^T}{1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{u}^T}{1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}, \quad \text{(A.3)}$$

at least for $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \neq 1$. Similarly

$$(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})^{-1} = (1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) I + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}, \quad \text{(A.4)}$$

for $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \neq 1$. Secondly observe

$$\begin{aligned}
(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})(I - \dot{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{u})^{-1} &= (I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}) \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{u})^n \right) \\
&= I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u})^n \right) + \dot{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{u} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u})^n \right) \\
&= I - \frac{\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}}{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}} + \frac{\dot{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{u}}{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}} \\
&= I + \frac{(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{u}}{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}}, \qquad \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

with this particular derivation holding for $|\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}| < 1$, though the result itself holds for $\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u} \neq 1$. Therefore, for $\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u} \neq 1$, we have

$$\begin{aligned}
(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})(I - \dot{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{u})^{-1}(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) &= \left(I + \frac{(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{u}}{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}} \right) (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) \\
&= (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) + \frac{(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} \cdot (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v})}{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}} \\
&= (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) \left\{ \frac{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v})}{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}} \right\} \\
&= (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) \left\{ \frac{1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}} \right\}. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

B Consistency of dynamics and kinematics

Note that from Hamilton's equations we know $\dot{\boldsymbol{x}} = \partial H / \partial \boldsymbol{p}$, so to first order (which is all we require) $\Delta E = \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \Delta \boldsymbol{p}$. Then from our discussion of the energy-momentum transformation laws, and specifically the fact that energy-momentum differences transform linearly, we have

$$\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \Delta \boldsymbol{p} = \gamma \, \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{p}} + \Delta \bar{\boldsymbol{p}}^T \Sigma \boldsymbol{v} = \Delta \bar{\boldsymbol{p}} \cdot (\gamma \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \Sigma \boldsymbol{v}), \qquad \text{(B.1)}$$

and

$$\Delta \boldsymbol{p} = \gamma \, (\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{p}}) \boldsymbol{u} + \Sigma^T \Delta \bar{\boldsymbol{p}} = (\gamma \, \boldsymbol{u} \otimes \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \Sigma^T) \Delta \bar{\boldsymbol{p}}. \qquad \text{(B.2)}$$

But then, for arbitrary $\Delta \bar{\boldsymbol{p}}$

$$\left\{ \dot{\boldsymbol{x}}^T (\gamma \, \boldsymbol{u} \otimes \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \Sigma^T) - (\gamma \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}^T + \Sigma \boldsymbol{v}^T) \right\} \Delta \bar{\boldsymbol{p}} = 0, \qquad \text{(B.3)}$$

implying

$$\dot{\boldsymbol{x}}^T (\gamma \, \boldsymbol{u} \otimes \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \Sigma^T) = (\gamma \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}^T + \boldsymbol{v}^T \Sigma^T). \qquad \text{(B.4)}$$

That is

$$(\gamma \, \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} \otimes \boldsymbol{u} + \Sigma) \dot{\boldsymbol{x}} = (\gamma \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \Sigma \boldsymbol{v}) \qquad \text{(B.5)}$$

whence

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\gamma \, \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} \otimes \boldsymbol{u} + \Sigma)^{-1} (\gamma \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} + \Sigma \boldsymbol{v}). \qquad \text{(B.6)}$$

This is equivalent to the velocity transformation law we previously derived. (Note that $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{0}$ implies $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}$, while $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ implies $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = -\Sigma \boldsymbol{v} / \gamma$.)

It is perhaps easier to start from the inverse transformations

$$\Delta E \to \Delta \bar{E} = \frac{\Delta E - \Delta \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}}{\gamma (1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})}, \qquad \text{(B.7)}$$

and

$$\Delta \boldsymbol{p} \to \Delta \bar{\boldsymbol{p}} = (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^{-1} (\Delta \boldsymbol{p} - \Delta E \boldsymbol{u}). \tag{B.8}$$

The energy transformation equation implies

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{p}} = \frac{(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) \cdot \Delta \boldsymbol{p}}{\gamma(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})}, \tag{B.9}$$

while the momentum transformation equation yields

$$\Delta \bar{\boldsymbol{p}} = (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^{-1} (\Delta \boldsymbol{p} - [\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \Delta \boldsymbol{p}] \boldsymbol{u}) \tag{B.10}$$

$$= (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^{-1} (I - \boldsymbol{u} \otimes \dot{\boldsymbol{x}}) \Delta \boldsymbol{p}. \tag{B.11}$$

But then

$$\left\{ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}^T (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^{-1} (I - \boldsymbol{u} \otimes \dot{\boldsymbol{x}}) - \frac{(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v})^T}{\gamma(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})} \right\} \Delta \boldsymbol{p} = 0, \tag{B.12}$$

whence

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}^T (\Sigma^{-1})^T (I - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})^{-1} (I - \boldsymbol{u} \otimes \dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v})^T}{\gamma(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})}. \tag{B.13}$$

Therefore

$$(I - \dot{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{u})(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})^{-1} \Sigma^{-1} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \frac{\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}}{\gamma(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})}, \tag{B.14}$$

and we see

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \Sigma (I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})(I - \dot{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{u})^{-1} \frac{(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v})}{\gamma(1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})}. \tag{B.15}$$

But (see appendix A)

$$(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})(I - \dot{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{u})^{-1} = I + \frac{(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{u}}{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}}. \tag{B.16}$$

Furthermore (see appendix A)

$$(I - \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u})(I - \dot{\boldsymbol{x}} \otimes \boldsymbol{u})^{-1} (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) = (\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v}) \left\{ \frac{1 - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{1 - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{u}} \right\}. \tag{B.17}$$

So finally

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \frac{\Sigma(\dot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v})}{\gamma(1 - \boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{x}})}, \tag{B.18}$$

which is the 3-velocity transformation law we had previously derived. (Note that $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{0}$ implies $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}$, while $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$ implies $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}} = -\Sigma \boldsymbol{v}/\gamma$.) This verifies the internal consistency of the manner in which our Hamiltonian/Lagrangian mechanics interacts with the generic transformation laws between inertial frames.

References

[1] W. A. von Ignatowsky, "Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip", Verh. Deutsch. Phys. Ges. **12**, 788–796 (1910);

[2] W. A. von Ignatowsky, "Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip", Phys. Zeitsch. **11**, 972–976 (1910);

[3] W. A. von Ignatowsky, "Das Relativitätsprinzip", Arch. Math. Phys. **3** (17), 1–24; (18), 17–41 (1911);

[4] W. A. von Ignatowsky, "Eine Bemerkung zu meiner Arbeit 'Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip'", Phys. Zeitsch. **12**, 779 (1911).

[5] P. Frank and H. Rothe, "Ueber die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme", Ann. Phys. **34**, 825–853 (1911);

[6] P. Frank and H. Rothe, "Zur Herleitung der Lorentz Transformation", Phys. Zeitsch. **13**, 750–753 (1912).

[7] A. N. Whitehead, *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* (Cambridge, Cambridge University Press, 1919), chapter XIII.

[8] L. A. Pars, "The Lorentz transformation", Phil. Mag. **42**, 249–258 (1921).

[9] V. Lalan, "Sur les postulats qui sont à la base des cinématiques", Bull. Soc. Math. France, **65**, 83–99 (1937).

[10] F. Severi, "Aspetti matematici dei legami tra relatività e senso comune", in *Cinquant'anni di Relatività*, edited by M. Pantaleo (Firenze, Giunti, 1955), pp. 309–333.

[11] Y. P. Terletskii, *Paradoxes in the Theory of Relativity* (New York, Plenum, 1968).

[12] G. Süssmann, "Begründung der Lorentz-Gruppe allein mit Symmetrie- und Relativitäts-Annahmen", Zeitsch. Naturf. **24A**, 495–498 (1969).

[13] V. Berzi, V. Gorini, "Reciprocity principle and the Lorentz transformations", J. Math. Phys. **10** (1969) 1518-1524.

[14] V. Gorini and A. Zecca, "Isotropy of space", J. Math. Phys. **11** (1970) 2226–2230.

[15] V. Gorini, "Linear kinematical groups", Commun. Math. Phys. **21**, 150-163 (1971).

[16] L. A. Lugiato, V. Gorini, "On the structure of relativity groups", J. Math. Phys. **13** (1972) 665-671.

[17] V. Berzi, V. Gorini, "On space-time, reference frames and the structure of relativity groups", Annales Poincare Phys. Theor. **16** (1972) 1-22.

[18] A. R. Lee and T. M. Kalotas, "Lorentz transformations from the first postulate", American Journal of Physics **43** (1975) 434–437.

[19] J. M. Lévy–Leblond, "One more derivation of the Lorentz transformation", American Journal of Physics **44** (1976) 1–13.

[20] A. M. Srivastava, "Invariant Speed in Special Relativity", American Journal of Physics **49** (1981) 504.

[21] W. Rindler, *Essential Relativity*, 2nd ed. (New York, Springer, 1977), pp. 51–53.

[22] M. Jammer, "Some foundational problems in the special theory of relativity", in *Problems in the Foundations of Physics*, edited by G. Toraldo di Francia (Amsterdam, North-Holland, 1979), pp. 202–236.

[23] R. Torretti, *Relativity and Geometry* (Dover, New York, 1996), pp. 76–82.

[24] V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation, Revised Second Edition*, (Pergamon Press, 1964).

[25] S. Liberati, S. Sonego and M. Visser, "Faster than c signals, special relativity, and causality", Annals Phys. **298** (2002) 167 [gr-qc/0107091].

[26] D. Colladay and V. A. Kostelecky, "Lorentz-violating extension of the standard model", Phys. Rev. D **58** (1998) 116002 [arXiv:hep-ph/9809521].

[27] V. A. Kostelecky and S. Samuel, "Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory", Phys. Rev. D **39** (1989) 683.

[28] V. A. Kostelecky, "Gravity, Lorentz violation, and the standard model", Phys. Rev. D **69** (2004) 105009 [arXiv:hep-th/0312310].

[29] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, "Stability, causality, and Lorentz and CPT violation", Phys. Rev. D **63** (2001) 065008 [arXiv:hep-th/0012060].

[30] V. A. Kostelecky and M. Mewes, "Signals for Lorentz violation in electrodynamics", Phys. Rev. D **66** (2002) 056005 [arXiv:hep-ph/0205211].

[31] V. A. Kostelecky and M. Mewes, "Lorentz and CPT violation in neutrinos", Phys. Rev. D **69** (2004) 016005 [arXiv:hep-ph/0309025].

[32] V. A. Kostelecky and C. D. Lane, "Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments", Phys. Rev. D **60** (1999) 116010 [arXiv:hep-ph/9908504].

[33] V. A. Kostelecky and M. Mewes, "Cosmological constraints on Lorentz violation in electrodynamics", Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 251304 [arXiv:hep-ph/0111026].

[34] D. Bear, R. E. Stoner, R. L. Walsworth, V. A. Kostelecky and C. D. Lane, "Limit on Lorentz and CPT violation of the neutron using a two-species noble-gas maser", Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 5038 [Erratum-ibid. **89** (2002) 209902] [arXiv:physics/0007049].

[35] P. Horava, "Quantum Gravity at a Lifshitz Point", Phys. Rev. **D79** (2009) 084008. [arXiv:0901.3775 [hep-th]].

[36] M. Visser, "Lorentz symmetry breaking as a quantum field theory regulator", Phys. Rev. **D80** (2009) 025011. [arXiv:0902.0590 [hep-th]].

[37] M. Visser, "Power-counting renormalizability of generalized Horava gravity", [arXiv:0912.4757 [hep-th]].

[38] T. P. Sotiriou, M. Visser, S. Weinfurtner, "Quantum gravity without Lorentz invariance", JHEP **0910** (2009) 033. [arXiv:0905.2798 [hep-th]].

[39] T. P. Sotiriou, M. Visser, S. Weinfurtner, "Phenomenologically viable Lorentz-violating quantum gravity", Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 251601. [arXiv:0904.4464 [hep-th]].

[40] S. Weinfurtner, T. P. Sotiriou, M. Visser, "Projectable Horava-Lifshitz gravity in a nutshell", J. Phys. Conf. Ser. **222** (2010) 012054. [arXiv:1002.0308 [gr-qc]].

[41] M. Visser, "Status of Horava gravity: A personal perspective", J. Phys. Conf. Ser. **314**, 012002 (2011). [arXiv:1103.5587 [hep-th]].

[42] C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, "Analogue gravity", Living Rev. Rel. **8** (2005) 12. [gr-qc/0505065].

[43] M. Visser, "Acoustic black holes: Horizons, ergospheres, and Hawking radiation", Class. Quant. Grav. **15**, 1767-1791 (1998). [gr-qc/9712010].

[44] M. Visser, C. Barceló and S. Liberati, "Acoustics in Bose-Einstein condensates as an example of broken Lorentz symmetry", hep-th/0109033.

[45] C. Barceló, S. Liberati and M. Visser, "Analog gravity from Bose-Einstein condensates", Class. Quant. Grav. **18** (2001) 1137 [gr-qc/0011026].

[46] D. Anselmi, "Renormalization And Lorentz Symmetry Violation", PoS C **LAQG08** (2011) 010.

[47] D. Anselmi and D. Buttazzo, "Distance Between Quantum Field Theories As A Measure Of Lorentz Violation", Phys. Rev. D **84** (2011) 036012 [arXiv:1105.4209 [hep-ph]].

[48] D. Anselmi, "Renormalization of Lorentz violating theories", *Prepared for 4th Meeting on CPT and Lorentz Symmetry, Bloomington, Indiana, 8-11 Aug 2007*

[49] D. Anselmi and M. Taiuti, "Vacuum Cherenkov Radiation In Quantum Electrodynamics With High-Energy Lorentz Violation", Phys. Rev. D **83** (2011) 056010 [arXiv:1101.2019 [hep-ph]].

[50] D. Anselmi and E. Ciuffoli, "Low-energy Phenomenology Of Scalarless Standard-Model Extensions With High-Energy Lorentz Violation", Phys. Rev. D **83** (2011) 056005 [arXiv:1101.2014 [hep-ph]].

[51] D. Anselmi and E. Ciuffoli, "Renormalization Of High-Energy Lorentz Violating Four Fermion Models", Phys. Rev. D **81** (2010) 085043 [arXiv:1002.2704 [hep-ph]].

[52] D. Anselmi and M. Taiuti, "Renormalization Of High-Energy Lorentz Violating QED", Phys. Rev. D **81** (2010) 085042 [arXiv:0912.0113 [hep-ph]].

[53] D. Anselmi, "Standard Model Without Elementary Scalars And High Energy Lorentz Violation", Eur. Phys. J. C **65** (2010) 523 [arXiv:0904.1849 [hep-ph]].

[54] D. Anselmi, "Weighted power counting, neutrino masses and Lorentz violating extensions of the Standard Model", Phys. Rev. D **79** (2009) 025017 [arXiv:0808.3475 [hep-ph]].

[55] D. Anselmi, "Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. II: Classification", Annals Phys. **324** (2009) 1058 [arXiv:0808.3474 [hep-th]].

[56] D. Anselmi, "Weighted power counting and Lorentz violating gauge theories. I: General properties", Annals Phys. **324** (2009) 874 [arXiv:0808.3470 [hep-th]].

[57] D. Anselmi, "Weighted scale invariant quantum field theories", JHEP **0802** (2008) 051 [arXiv:0801.1216 [hep-th]].

[58] D. Anselmi and M. Halat, "Renormalization of Lorentz violating theories", Phys. Rev. D **76** (2007) 125011 [arXiv:0707.2480 [hep-th]].

[59] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, "Beta Function In A Noncovariant Yang-mills Theory", Nucl. Phys. B **141** (1978) 153.

[60] S. Chadha and H. B. Nielsen, "Lorentz Invariance As A Low-energy Phenomenon", Nucl. Phys. B **217** (1983) 125.

[61] H. B. Nielsen and I. Picek, "Lorentz Noninvariance", Nucl. Phys. B **211** (1983) 269 [Addendum-ibid. B **242** (1984) 542].

[62] H. B. Nielsen and I. Picek, "Lorentz Noninvariance. (addendum) On A Possible Subtraction For The Lorentz Noninvariant Model", Nucl. Phys. B **242** (1984) 542.

[63] H. B. Nielsen and I. Picek, "Redei Like Model And Testing Lorentz Invariance", Phys. Lett. B **114** (1982) 141.

[64] S. R. Coleman, S. L. Glashow, "Cosmic ray and neutrino tests of special relativity", Phys. Lett. **B405** (1997) 249-252. [hep-ph/9703240].

[65] S. R. Coleman, S. L. Glashow, "High-energy tests of Lorentz invariance", Phys. Rev. **D59** (1999) 116008. [hep-ph/9812418].

[66] G. Amelino-Camelia, J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos and S. Sarkar, "Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts," Nature **393** (1998) 763 [astro-ph/9712103].

[67] R. Gambini and J. Pullin, "Nonstandard optics from quantum space-time," Phys. Rev. D **59** (1999) 124021 [gr-qc/9809038].

[68] T. Kifune, "Invariance violation extends the cosmic ray horizon?," Astrophys. J. **518** (1999) L21 [astro-ph/9904164].

[69] R. Aloisio, P. Blasi, P. L. Ghia and A. F. Grillo, "Probing the structure of space-time with cosmic rays," Phys. Rev. D **62** (2000) 053010 [astro-ph/0001258].

[70] G. Amelino-Camelia and T. Piran, "Planck scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the UHECR and the TeV gamma paradoxes," Phys. Rev. D **64** (2001) 036005 [astro-ph/0008107].

[71] S. Liberati, T. A. Jacobson and D. Mattingly, "High energy constraints on Lorentz symmetry violations", arXiv:hep-ph/0110094.

[72] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, "TeV astrophysics constraints on Planck scale Lorentz violation", Phys. Rev. D **66** (2002) 081302 [arXiv:hep-ph/0112207].

[73] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, "Threshold effects and Planck scale Lorentz violation: Combined constraints from high energy astrophysics", Phys. Rev. D **67** (2003) 124011 [arXiv:hep-ph/0209264].

[74] D. Mattingly, T. Jacobson, S. Liberati, "Threshold configurations in the presence of Lorentz violating dispersion relations", Phys. Rev. **D67** (2003) 124012. [hep-ph/0211466].

[75] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, "Lorentz violation and Crab synchrotron emission: A new constraint far beyond the Planck scale", Nature **424** (2003) 1019 [arXiv:astro-ph/0212190].

[76] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, "Comments on 'Improved limit on quantum-spacetime modifications of Lorentz symmetry from observations of gamma-ray blazars' ", arXiv:gr-qc/0303001.

[77] T. A. Jacobson, S. Liberati, D. Mattingly and F. W. Stecker, "New limits on Planck scale Lorentz violation in QED", Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 021101 [arXiv:astro-ph/0309681].

[78] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, "Quantum gravity phenomenology and Lorentz violation", Springer Proc. Phys. **98** (2005) 83 [arXiv:gr-qc/0404067].

[79] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, "Astrophysical bounds on Planck suppressed Lorentz violation", Lect. Notes Phys. **669** (2005) 101 [arXiv:hep-ph/0407370].

[80] T. Jacobson, S. Liberati and D. Mattingly, "Lorentz violation at high energy: concepts, phenomena and astrophysical constraints", Annals Phys. **321** (2006) 150 [arXiv:astro-ph/0505267].

[81] D. Mattingly, "Modern tests of Lorentz invariance", Living Rev. Rel. **8** (2005) 5. [gr-qc/0502097].

[82] T. Adam *et al.* [OPERA Collaboration], "Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam", [arXiv:1109.4897 [hep-ex]].

[83] P. Adamson *et al.* [MINOS Collaboration], "Measurement of neutrino velocity with the MINOS detectors and NuMI neutrino beam", Phys. Rev. **D76** (2007) 072005. [arXiv:0706.0437 [hep-ex]].

[84] G. Amelino-Camelia, G. Gubitosi, N. Loret, F. Mercati, G. Rosati, P. Lipari, "OPERA — Reassessing data on the energy dependence of the speed of neutrinos", [arXiv:1109.5172 [hep-ph]].

[85] G. Amelino-Camelia, L. Freidel, J. Kowalski-Glikman and L. Smolin, "OPERA neutrinos and relativity," arXiv:1110.0521 [hep-ph].

[86] G. F. Giudice, S. Sibiryakov, A. Strumia, "Interpreting OPERA results on superluminal neutrino", [arXiv:1109.5682 [hep-ph]].

[87] A. G. Cohen and S. L. Glashow, "Pair Creation Constrains Superluminal Neutrino Propagation", Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 181803 [arXiv:1109.6562 [hep-ph]].

[88] G. Dvali, A. Vikman, "Price for Environmental Neutrino-Superluminality", [arXiv:1109.5685 [hep-ph]].

[89] J. Alexandre, J. Ellis, N. E. Mavromatos, "On the Possibility of Superluminal Neutrino Propagation", [arXiv:1109.6296 [hep-ph]].

[90] G. Cacciapaglia, A. Deandrea, L. Panizzi, "Superluminal neutrinos in long baseline experiments and SN1987a", [arXiv:1109.4980 [hep-ph]].

[91] X. -J. Bi, P. -F. Yin, Z. -H. Yu, Q. Yuan, "Constraints and tests of the OPERA superluminal neutrinos", [arXiv:1109.6667 [hep-ph]].

[92] F. R. Klinkhamer, "Superluminal muon-neutrino velocity from a Fermi-point-splitting model of Lorentz violation", [arXiv:1109.5671 [hep-ph]].

[93] S. S. Gubser, "Superluminal neutrinos and extra dimensions: Constraints from the null energy condition", Phys. Lett. **B705** (2011) 279-281. [arXiv:1109.5687 [hep-th]].

[94] A. Kehagias, "Relativistic Superluminal Neutrinos", [arXiv:1109.6312 [hep-ph]].

[95] P. Wang, H. Wu, H. Yang, "Superluminal neutrinos and domain walls", [arXiv:1109.6930 [hep-ph]].

[96] E. N. Saridakis, "Superluminal neutrinos in Horava-Lifshitz gravity", [arXiv:1110.0697 [gr-qc]].

[97] W. Winter, "How large is the fraction of superluminal neutrinos at OPERA?", [arXiv:1110.0424 [hep-ph]].

[98] J. Alexandre, "Lifshitz-type Quantum Field Theories in Particle Physics", Int. J. Mod. Phys. **A26** (2011) 4523. [arXiv:1109.5629 [hep-ph]].

[99] F. R. Klinkhamer, G. E. Volovik, "Superluminal neutrino and spontaneous breaking of Lorentz invariance", Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94** (2011) 731. [arXiv:1109.6624 [hep-ph]].

[100] R. Cowsik, S. Nussinov, U. Sarkar, "Superluminal Neutrinos at OPERA Confront Pion Decay Kinematics", [arXiv:1110.0241 [hep-ph]].

[101] L. Maccione, S. Liberati, D. M. Mattingly, "Violations of Lorentz invariance in the neutrino sector after OPERA", [arXiv:1110.0783 [hep-ph]].

[102] N. D. H. Dass, "OPERA, SN1987a and energy dependence of superluminal neutrino velocity", [arXiv:1110.0351 [hep-ph]].

[103] J. M. Carmona and J. L. Cortes, "Constraints from Neutrino Decay on Superluminal Velocities", arXiv:1110.0430 [hep-ph].

[104] V. Baccetti, K. Tate and M. Visser, "Lorentz violating kinematics: Threshold theorems", arXiv:1111.6340 [hep-ph], JHEP in press.

[105] M. Antonello *et al.* [ICARUS Collaboration], "Measurement of the neutrino velocity with the ICARUS detector at the CNGS beam," arXiv:1203.3433 [hep-ex].

[106] G. Amelino-Camelia, "Relativity in space-times with short distance structure governed by an observer independent (Planckian) length scale", Int. J. Mod. Phys. D **11** (2002) 35 [gr-qc/0012051].

[107] G. Amelino-Camelia, "Particle-dependent deformations of Lorentz symmetry", arXiv:1111.5643 [hep-ph].

[108] G. Amelino-Camelia, "Doubly special relativity", Nature **418** (2002) 34 [gr-qc/0207049].

[109] S. Judes, M. Visser, "Conservation laws in 'Doubly special relativity' ", Phys. Rev. **D68** (2003) 045001. [arXiv:gr-qc/0205067 [gr-qc]].

[110] S. Liberati, S. Sonego, M. Visser, "Interpreting doubly special relativity as a modified theory of measurement", Phys. Rev. **D71** (2005) 045001. [gr-qc/0410113].

[111] F. Girelli and E. R. Livine, "Physics of deformed special relativity: Relativity principle revisited," gr-qc/0412004.

[112] F. Girelli, T. Konopka, J. Kowalski-Glikman and E. R. Livine, "The Free particle in deformed special relativity," Phys. Rev. D **73** (2006) 045009 [hep-th/0512107].

[113] L. Smolin, "Classical paradoxes of locality and their possible quantum resolutions in deformed special relativity," Gen. Rel. Grav. **43** (2011) 3671 [arXiv:1004.0664 [gr-qc]].

[114] A. A. Deriglazov, "Doubly special relativity in position space starting from the conformal group," Phys. Lett. B **603** (2004) 124 [hep-th/0409232].

[115] S. Hossenfelder, "Multi-Particle States in Deformed Special Relativity," Phys. Rev. D **75** (2007) 105005 [hep-th/0702016].

[116] R. Aloisio, A. Galante, A. F. Grillo, E. Luzio and F. Mendez, "Approaching space time through velocity in doubly special relativity," Phys. Rev. D **70** (2004) 125012 [gr-qc/0410020].

[117] R. Aloisio, A. Galante, A. F. Grillo, E. Luzio and F. Mendez, "A Note on DSR-like approach to space-time," Phys. Lett. B **610** (2005) 101 [gr-qc/0501079].

[118] R. Schutzhold and W. G. Unruh, "Large-scale nonlocality in 'doubly special relativity' with an energy-dependent speed of light," JETP Lett. **78** (2003) 431 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **78** (2003) 899] [gr-qc/0308049].

[119] D. Grumiller, W. Kummer and D. V. Vassilevich, "A Note on the triviality of Kappa deformations of gravity," Ukr. J. Phys. **48** (2003) 329 [hep-th/0301061].

[120] D. V. Ahluwalia and , "Operational indistinguishability of doubly special relativities from special relativity," gr-qc/0212128.

[121] J. Rembielinski and K. A. Smolinski, "Unphysical predictions of some doubly special relativity theories," Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz **53** (2003) 57 [hep-th/0207031].

[122] X. Calmet, S. Hossenfelder and R. Percacci, "Deformed Special Relativity from Asymptotically Safe Gravity," Phys. Rev. D **82** (2010) 124024 [arXiv:1008.3345 [gr-qc]].

[123] S. Hossenfelder, "Bounds on an energy-dependent and observer-independent speed of light from violations of locality," Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 140402 [arXiv:1004.0418 [hep-ph]].

[124] S. Hossenfelder, "The Box-Problem in Deformed Special Relativity," arXiv:0912.0090 [gr-qc].

[125] S. Hossenfelder, "Deformed Special Relativity in Position Space," Phys. Lett. B **649** (2007) 310 [gr-qc/0612167].

[126] S. Hossenfelder, "Comment on arXiv:1007.0718 by Lee Smolin," arXiv:1008.1312 [gr-qc].

[127] S. Hossenfelder, "Comments on Nonlocality in Deformed Special Relativity, in reply to arXiv:1004.0664 by Lee Smolin and arXiv:1004.0575 by Jacob et al," arXiv:1005.0535 [gr-qc].

[128] C. Rovelli, "A Note on DSR," arXiv:0808.3505 [gr-qc].

[129] F. Hinterleitner, "Canonical DSR," Phys. Rev. D **71** (2005) 025016 [gr-qc/0409087].

[130] M. Daszkiewicz, K. Imilkowska and J. Kowalski-Glikman, "Velocity of particles in doubly special relativity," Phys. Lett. A **323** (2004) 345 [hep-th/0304027].

[131] S. Ghosh, "A Lagrangian for DSR Particle and the Role of Noncommutativity," Phys. Rev. D **74** (2006) 084019 [hep-th/0608206].

[132] G. Amelino-Camelia, M. Matassa, F. Mercati and G. Rosati, "Taming Nonlocality in Theories with Planck-Scale Deformed Lorentz Symmetry," Phys. Rev. Lett. **106** (2011) 071301 [arXiv:1006.2126 [gr-qc]].

[133] S. Hossenfelder, "Reply to arXiv:1006.2126 by Giovanni Amelino-Camelia et al," arXiv:1006.4587 [gr-qc].

[134] G. Amelino-Camelia, "On the fate of Lorentz symmetry in relative-locality momentum spaces," arXiv:1110.5081 [hep-th].

[135] G. Amelino-Camelia, L. Freidel, J. Kowalski-Glikman and L. Smolin, "The principle of relative locality," Phys. Rev. D **84** (2011) 084010 [arXiv:1101.0931 [hep-th]].

[136] G. Amelino-Camelia, L. Freidel, J. Kowalski-Glikman and L. Smolin, "Relative locality: A deepening of the relativity principle," Gen. Rel. Grav. **43**, 2547 (2011) [arXiv:1106.0313 [hep-th]].

[137] S. Hossenfelder, "Comment on arXiv:1104.2019, 'Relative locality and the soccer ball problem,' by Amelino-Camelia et al," arXiv:1202.4066 [hep-th].

[138] J. M. Lévy-Leblond, "Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré", Annales de l'Institut Henri Poincaré **A3** (1965) 1–12.

[139] Freeman Dyson, "Missed Opportunities", Bulletin of the American Mathematical Society **78** (1972) 635–652.

[140] N. A. Gromov and V. V. Kuratov, "Quantum kinematics," hep-th/0410086.

[141] Jens Madsen Houlrik and Germain Rousseaux, "'Nonrelativistic' kinematics: Particles or waves?", arXiv: 1005.1762v1 [gen-ph].

[142] M. de Montigny and G. Rousseaux, "On some applications of Galilean electrodynamics of moving bodies", American Journal of Physics **75** (2007) 984–992.

[143] H. Padmanabhan and T. Padmanabhan, "Non-relativistic limit of quantum field theory in inertial and non-inertial frames and the Principle of Equivalence," Phys. Rev. D **84** (2011) 085018 [arXiv:1110.1314 [gr-qc]].

[144] H. Robertson, "Postulate versus observation in the special theory of relativity", Rev. Mod. Phys. **21** (1949) 378

[145] R. Mansouri, and R. U. Sexl, "A test theory of special relativity. I - Simultaneity and clock synchronization", Gen. Relativ. Gravit., 8, 497-513, (1977).